Н. М. ГЮНТЕР и Р. О. КУЗЬМИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ТОМ I

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. И. АМОСОВА и *Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ*

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего образования
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

Отдел V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Отдел VI

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В основе предлагаемого задачника лежит сборник задач по высшей математике, составленный в 1912 г. сотрудниками кафедры математики Института инженеров путей сообщения, во главе которой стоял Н. М. Гюнтер. В некоторых дальнейших изданиях того же задачника принимали участие работники физико-математического факультета Ленинградского университета. В последующих изданиях, выходивших под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, принимали участие и некоторые сотрудники кафедры высшей математики Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина.

При подготовке настоящего издания были тщательно проверены решения задач и введен ряд новых примеров. Эта работа произведена С. И. Амосовым и Н. А. Никольской.

С. И. Амосов и *Г. Ю. Джанелидзе*

24 июня 1956 г.
Ленинград

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к печати этого издания была проведена большая работа по выявлению опечаток и недосмотров, имевшихся в предыдущем издании. С этой целью все задачи были решены сотрудниками кафедры математики Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина. В этой большой работе приняли участие следующие лица:

С. И. Амосов, Е. А. Анфертьева, М. И. Болгов, Г. Н. Бровкович, Д. Л. Гавра, Д. С. Горшков, А. Б. Гур-Мильнер, А. И. Добрадина, М. М. Добулевич, В. Л. Кан, А. Б. Кордашенко, Т. И. Лаппо, Н. А. Никольская, С. Н. Нумеров, А. П. Соболев, П. Ф. Черенков.

Всем им выражаю глубокую благодарность.

Р. О. Кузьмин

Январь 1949 г.
Ленинград

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Векторы, проекции и координаты на плоскости. Простейшие приложения

1. Даны точки $A(2, 5)$ и $B(-3, 2)$. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на оси координат.

2. Даны точки $A(1, 2)$ и $B(5, -1)$. Найти углы вектора $\overline{AB}$ с осями Ox и Oy, а также длину этого вектора.

3. Даны точки $A(2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 5)$, $D(-5, 11)$. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

4. Даны точки $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 7)$, $D(-1, -5)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{CD}$.

5. Даны точки $A(3, 5)$, $B(6, -2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, направленную из начала координат по биссектрисе первого координатного угла.

6. Из начала координат проведены векторы в точки $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(6, -10)$. Найти их геометрическую сумму по величине и направлению.

7. Противоположные вершины прямоугольника суть $A(3, 7)$, $B(11, -1)$. Найти центр прямоугольника.

8. Из точки $A(2, 3)$ проведен отрезок до точки $B(7, -2)$ и продолжен еще на столько же. Найти координаты конца продолжения.

9. Отрезок AB разделен на три равные части точками $M_1(1, 2)$ и $M_2(3, 4)$. Найти точки A и B.

10. Точки $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(3, -1)$ — три последовательные вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

11. Середины сторон треугольника — в точках $M_1(-2, 1)$, $M_2(2, 3)$, $M_3(4, -1)$. Найти координаты вершин.

12. Две последовательные вершины квадрата — в точках $A(2, 3)$ и $B(6, 6)$. Где остальные вершины?

13. Две последовательные вершины правильного шестиугольника — в точках $M_1(0, 0)$ и $M_2(4, 0)$. Где следующая вершина?

14. В точках $(3, 5)$ и $(9, -7)$ помещены массы 2 и 1. Где центр тяжести этих масс?

15. В точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ помещены массы m_1, m_2 и m_3 соответственно. Доказать, что координаты центра тяжести этих масс выражаются формулами

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

16. Массы равной величины помещены в вершинах многоугольника. Доказать, что координаты их центра тяжести равны арифметическим средним координат вершин.

17. Центр правильного многоугольника — в начале координат. Доказать, что сумма координат вершин равна нулю.

18. К сторонам многоугольника восставлены перпендикуляры, пропорциональные сторонам и направленные в наружную сторону. Доказать, что их геометрическая сумма равна нулю.

19. Даны координаты середин сторон многоугольника с нечетным числом сторон: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})$. Найти координаты вершин.

20. На оси Ox найти точку, расстояние которой до точки (5, 12) равно 13.

21. $M_1(2, 1)$, $M_2(-3, 2)$, $M_3(-1, 1)$ — вершины треугольника. Найти центр и радиус описанного круга.

22. Вершины треугольника — в точках $O(0, 0)$, $M_1(3, 5)$, $M_2(-2, 3)$. Найти его площадь.

23. Вершины треугольника — в точках $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -5)$. Найти его площадь.

24. Две вершины треугольника — в точках (5, 1), (—2, 2), третья вершина — на оси Ox. Найти ее, зная, что площадь равна 10.

25. Найти площадь четырехугольника по координатам его вершин: $M_1(5, 6)$, $M_2(5, -6)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-2, 1)$.

26. Найти площадь четырехугольника по координатам его вершин: $M_1(5, 6)$, $M_2(5, -6)$, $M_3(-2, 1)$, $M_4(-2, -1)$.

27. Найти площадь пятиугольника по его вершинам: $M_1(0, 0)$, $M_2(3, -2)$, $M_3(5, -1)$, $M_4(8, 4)$, $M_5(4, 5)$.

28. После переноса начала координат без поворота осей точка (2, 4) получила координаты (—3, 0). Найти прежние координаты нового начала.

29. Новые оси делят на равные части углы между прежними. Ось Ox_1 составляет положительный острый угол с Oy. Составить формулы преобразования координат.

30. Новое начало — в точке (2, 3). Точка (6, 0) — на положительном направлении новой оси ординат. Каковы новые координаты точки (7, 8)?

31. Вершины квадрата — в точках (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2). Составить формулы преобразования координат, если за новые оси приняты диагонали квадрата, а точка (2, 0) находится на положительном направлении оси O_1x_1.

32. Новое начало — в точке (1, —2). Новая ось ординат составляет с прежней осью абсцисс острый угол, тангенс которого $\frac{3}{4}$. Найти точку, у которой прежние координаты равны новым.

33. При каком повороте осей величина $x^2 - y^2$ переходит в $2x_1y_1$?

34. Доказать, что при общем преобразовании координат (с переносом и поворотом осей) прежние оси могут быть совмещены с новыми путем поворота всей плоскости вокруг некоторой точки.

35. Даны полярные координаты точки: $r = 10$, $\varphi = 30°$. Найти ее прямоугольные координаты, если полюс — в точке (2, 3), а полярная ось параллельна оси Ox.

36. Найти расстояние между точками, зная их полярные координаты: $r_1 = 3$, $\varphi_1 = 10°$; $r_2 = 5$, $\varphi_2 = 130°$.

37. Полюс — в точке (3, 5). Полярная ось параллельна положительному направлению оси Oy. Найти полярные координаты точек $M_1(9, -1)$ и $M_2(5, 5+2\sqrt{3})$.

38. Рассматривая проекции некоторой ломаной линии, доказать формулы:

$$\sin\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi = \frac{1-\cos 2n\varphi}{2\sin\varphi};$$

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}.$$

§ 2. Прямая и окружность

39. Найти уравнение прямой, параллельной оси Ox и удаленной от нее на h.

40. Найти уравнение прямой, параллельной оси Oy и удаленной от нее на h.

41. Вершины квадрата — в точках (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1). Найти уравнения его диагоналей.

42. На прямой $y = 2x - 3$ найти точку, ордината которой равна 7.

43. Считая, что ось Ox расположена горизонтально, определить, какие из точек $M_1(-1, 2)$, $M_2(-3, -10)$, $M_3(2, 1)$, $M_4(5, 4)$ расположены выше, ниже и на прямой $y = 2x - 3$.

44. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2, 1) и составляющей с Ox угол 45°.

45. Провести прямую через точки $M_1(-1, 2)$ и $M_2(2, 1)$.

46. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (3, 7) и (3, —2).

47. Найти уравнения сторон треугольника, вершины которого — в точках $M_1(1, -1)$, $M_2(3, 5)$, $M_3(-7, 11)$.

48. Через точку (2, —1) провести прямую, параллельную прямой $2x + 3y = 0$.

49. Через точку $(2, -3)$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $y=2x+1$.

50. Через точку $(3, 5)$ провести прямые под углом $45°$ к прямой $3x-2y+7=0$.

51. Найти углы треугольника с вершинами в точках $M_1(0, 2)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

52. Через точку $(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь, ограниченная ею и осями координат, равнялась 3 кв. единицам.

53. Найти вершины треугольника по уравнениям его сторон: $x-y=0$, $2x+3y+5=0$, $x+2y+6=0$.

54. Найти площадь треугольника по уравнениям его сторон: $y=3x-9$, $y=-2x+1$, $y=-x+3$.

55. Через точку $(1, 2)$ провести прямую, образующую угол $30°$ с прямой $x-2y=0$, и найти точку пересечения данной прямой и искомой.

56. Дана вершина квадрата $(2, -2)$ и его диагональ $x+2y=0$. Найти уравнения сторон квадрата.

57. Дана прямая $3x-2y+2=0$ и точка $M(-4, 8)$. Найти проекцию M' точки M на заданную прямую и определить отношение $|OM'|:|OM|$.

58. Через точку $(1, 2)$ провести прямую, расстояния которой до точек $(2, 3)$ и $(4, -5)$ были бы одинаковы.

59. Уравнения двух сторон параллелограмма: $x+2y+1=0$ и $2x+y-3=0$. Центр его — в точке $(1, 2)$. Найти уравнения двух других сторон.

60. Через точку $(-1, 2)$ провести прямую, расстояние которой до точки $(6, 1)$ равно 5.

61. Через точку $(2, -2)$ провести прямые, расстояния которых до точки $(5, 2)$ равны 3.

62. Дана точка $M(-1, 2)$ и прямая $y=3x$. Провести прямую, параллельную данной, расстояние которой от точки M втрое больше, чем расстояние данной.

63. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-4, 3)$ и удаленной от начала координат на расстояние, равное 5.

64. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние, равное 3.

65. Найти расстояние между прямыми $2x+3y=7$ и $4x+6y=11$.

66. Найти прямую, параллельную прямым $x+2y=1$ и $x+2y=3$, расположенную между ними и делящую расстояние между ними в отношении $1:3$.

67. Найти уравнение прямой, лежащей по середине между данными прямыми $3x+2y=5$ и $6x+4y+3=0$.

68. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $2x+3y+6=0$ и отсекающей от координатного угла треугольник с площадью 3.

69. Даны прямая $2x+y-3=0$ и точка $M(1, 1)$ на ней. На той же прямой найти точки, удаленные от M на $\sqrt{5}$.

70. Найти уравнения сторон треугольника, у которого $2x-3y+1=0$ и $x+y=0$ — высоты, а $M(1, 2)$ — одна из вершин.

71. $M_1(2, 1)$ и $M_2(4, 9)$ — вершины треугольника, $N(3, 4)$ — точка пересечения высот. Найти уравнения сторон.

72. Середины сторон треугольника — в точках (1, 2), (7, 4), (3, —4). Найти уравнения сторон.

73. Даны две стороны параллелограмма $2y-x=0$, $x-3=0$ и вершина (7, 5). Найти угол между диагоналями.

74. Даны две стороны параллелограмма $2x-y=0$, $x-3y=0$ и центр его (2, 3). Найти уравнения диагоналей.

75. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину (—4, 3) и уравнения двух медиан: $3x-2y+3=0$, $3x-5y+6=0$.

76. Пересечение медиан — в точке (—1, 0), а $x+y-1=0$ и $y+1=0$ — уравнения двух сторон. Найти уравнение третьей стороны.

77. Вершины треугольника — в точках $A(1, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(2, -2)$. Найти уравнения высот.

78. Через точку пересечения прямых $x-y-1=0$ и $x+2y-2=0$ провести прямую, проходящую через точку (—1, 1).

79. Провести прямую через начало координат и точку пересечения прямых $17x+29y=317$ и $3x+10y=634$.

80. Через точку пересечения прямых $x+2y-11=0$ и $2x-y-2=0$ провести прямую, расстояние которой от начала координат равно 5.

81. Через точку (—1, 1) провести прямую так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

82. Через начало координат провести прямые так, чтобы отрезки их между прямыми $x-y+1=0$ и $x-y-2=0$ были равны 3.

83. Найти прямую, проходящую через точку (2, 3), зная, что отрезок этой прямой между прямыми $3x+4y-7=0$ и $3x+4y+8=0$ равен $3\sqrt{2}$.

84. Найти биссектрисы углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

85. Найти биссектрису того угла между прямыми $4x+7y-3=0$ и $8x-y+6=0$, в котором лежит начало координат.

86. Точки (1, 2), (—1, —1), (2, 1) — вершины треугольника. Найти уравнение биссектрисы внутреннего угла при точке (—1, —1).

87. Найти радиус круга, вписанного в треугольник, если даны уравнения сторон: $3x-4y=25$, $5x+12y=65$, $8x+15y+85=0$.

88. Даны стороны треугольника $2x+y=0$, $x-2y=0$ и $2x+11y-20=0$. Найти центр вписанного круга.

89. Дана точка $P(0, 1)$. Провести через нее прямую так, чтобы ее отрезок между прямыми $x-3y+10=0$ и $2x+y-8=0$ делился самой точкой P пополам.

90. Дана одна сторона угла $y=2x$ и биссектриса $2y-x-3=0$. Найти другую сторону угла.

91. Даны две вершины треугольника $A(1, 6)$ и $B(7, -2)$ и центр вписанной окружности $O(4, 4)$. Найти третью вершину C.

92. Уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $2x-y+8=0$ и $x-2y-12=0$. Точка $(4, 0)$ — на основании. Найти уравнение основания.

93. Луч света проходит через точку $(2, 3)$, отражается в прямой $x+y+1=0$ и попадает в точку $(1, 1)$. Найти уравнения луча падающего и луча отраженного.

94. Прямая $2x+y-1=0$ — биссектриса, а точки $(1, 2)$ и $(-1, -1)$ — вершины треугольника. Найти третью вершину.

95. Точка $(2, 5)$ — вершина треугольника, прямые $3x+4y-12=0$ и $x-y-1=0$ — биссектрисы внутренних углов. Найти уравнения сторон.

96. Точки $(1, 1)$ и $(5, 4)$ — вершины треугольника, $2x-y-1=0$ — внутренняя биссектриса. Найти уравнения сторон, зная, что площадь треугольника равна 5.

97. Уравнение основания равнобедренного треугольника: $x+y-1=0$, уравнение боковой стороны: $x-2y-2=0$. Точка $(-2, 0)$ — на другой боковой стороне. Найти уравнение этой стороны.

98. Биссектрисы внутренних углов треугольника A и B пересекают его стороны в точках M и N. Доказать, что для любой точки отрезка MN сумма расстояний до сторон AC и BC равна расстоянию до стороны AB.

99. Через точку на биссектрисе угла проведены две прямые. Одна из них отсекает на сторонах угла, считая от вершины, отрезки a и b, другая — отрезки a_1 и b_1. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}$.

100. Взять прямые $2x-y+1=0$ и $x+2y-1=0$ за новые оси O_1x_1 и O_1y_1, выбрав направления так, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Найти формулы перехода от одних координат к другим.

101. Прямые $x-y-1=0$ и $x+y+2=0$ приняты за новые оси координат так, что новые координаты прежнего начала отрицательны. Найти новые уравнения прежних осей.

102. Прямая пересекает стороны треугольника AB и CB в точках M и N, а продолжение стороны AC — в точке P. Доказать равенство

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

(теорема Менелая).

103. Точки M, N, P — на сторонах BC, CA и AB треугольника. Прямые AM, BN и CP пересекаются в одной точке. Доказать равенство

$$AN \cdot BP \cdot CM = NC \cdot PA \cdot MB.$$

104. Доказать, что уравнения биссектрис треугольника можно написать в виде

$$s_1 \pm s_2 = 0, \quad s_1 \pm s_3 = 0, \quad s_2 \pm s_3 = 0,$$

где через s_1, s_2 и s_3 обозначены левые части уравнений сторон треугольника, взятых в нормальной форме.

105. Гомографическое или проективное преобразование плоскости состоит в том, что каждая точка (x, y) переходит в точку (x_1, y_1), где

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}; \qquad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}; \qquad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 > 0.$$

Доказать, что при любом выборе коэффициентов a_k, b_k, c_k $(k = 0, 1, 2)$ проективное преобразование представляет коллинеацию, т. е. переводит прямые в прямые.

106. Ангармоническим отношением четырех точек A, B, C, D, лежащих на прямой, называется отношение

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Доказать что при проективном преобразовании величина ангармонического отношения не меняется.

107. Найти общий вид уравнений окружностей, касающихся оси Ox в начале координат.

108. Найти уравнение окружностей предыдущей задачи в полярных координатах, если полярная ось совпадает с положительной частью оси Ox.

109. Найти центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0.$$

110. Составить уравнение окружности радиуса $r = 2$, касающейся прямых $3x + 4y - 8 = 0$ и $12x - 5y + 17 = 0$.

111. Найти длину отрезка прямой $x + 5y = 9$, лежащего внутри окружности $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$.

112. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $M_1(0, 0)$, $M_2(10, 0)$, $M_3(6, 8)$.

113. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ найти точку, одинаково удаленную от точек $(1, 3)$ и $(-2, 2)$.

114. Найти уравнение круга, вписанного в треугольник, стороны которого даны уравнениями:

$$3x + 4y = 25, \quad 5x - 12y = 65, \quad 8x - 15y + 85 = 0.$$

115. Через точку (1, 2) провести касательную к окружности $x^2+y^2=5$.

116. Через точку (—1, 3) провести касательные к окружности $x^2+y^2=5$.

117. Найти общую хорду окружностей

$$x^2+y^2=2ax \quad \text{и} \quad x^2+y^2=2by.$$

118. Найти общие касательные к окружностям

$$x^2+y^2=6x \quad \text{и} \quad x^2+y^2=6y.$$

119. Точка (x_1, y_1) — вне окружности $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Найти длину l касательной из точки к окружности.

120. Точка (x_1, y_1) — внутри окружности $x^2+y^2+Ax+By+$ $+C=0$. Доказать, что хорда окружности, проходящая через (x_1, y_1), делится этой точкой на части, произведение которых равно $(x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C)$.

121. Окружность касается осей координат и проходит через точку (4, 8). Найти ее уравнение.

122. Окружность касается оси Oy и проходит через начало координат и точку (3, 6). Найти ее уравнение.

123. На оси Ox найти такую точку, касательные из которой к окружностям $x^2+y^2=6y-6$ и $x^2+y^2=2x$ были бы одинаковой длины.

124. Найти общий вид окружностей, касающихся обеих биссектрис координатных углов.

125. Показать, что геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек находятся в данном отношении, не равном единице, есть окружность (окружность Аполлония).

126. Показать, что геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям имеют одинаковую длину, есть прямая (радикальная ось двух кругов).

127. Доказать, что при любых a и b окружности $x^2+y^2=ax$ и $x^2+y^2=by$ пересекаются под прямым углом. Здесь под углом между кривыми понимается, как обычно, угол между их касательными в точке пересечения.

128. Показать, что каждая из окружностей

$$(x-a)^2+y^2=a^2+h^2$$

пересекается под прямым углом с каждой из окружностей

$$x^2+\left(y\pm\sqrt{r^2+h^2}\right)^2=r^2.$$

129. Доказать, что каждая из окружностей

$$x^2+y^2-2ax+b^2=0$$

пересекается с каждой из окружностей

$$x^2+y^2-2cy-b^2=0$$

под прямым углом.

§ 3. Геометрические места

130. Из начала координат проведены хорды окружности $x^2+y^2=2ax$. Найти геометрическое место середин этих хорд.

131. Найти уравнение геометрического места точек, расстояния которых до прямых $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ имеют отношение $m:n$.

132. Отрезок длиной $a+b$ скользит концами по осям координат. Найти кривую, описанную точкой M, делящей его на части a и b. (Эллипсограф Леонардо да-Винчи.)

133. Проведены две окружности радиусов b и a с центром в начале координат. Переменный радиус пересекает внутреннюю из них в точке A, внешнюю — в B. Из A проводим прямую параллельно оси Ox, из B — параллельно оси Oy до взаимного пересечения этих прямых в точке M. Найти геометрическое место точки M.

134. Из начала координат проводится прямая, составляющая угол $\frac{\pi\theta}{2}$ с осью Oy. Эта прямая в точке M пересекается прямой $x=a\theta$. Найти уравнение геометрического места точки M. (Квадратриса Динострата.)

135. Из начала координат проводятся хорды окружности $x^2+y^2=2ax$ и продолжаются до пересечения с прямой $x=2a$. Эти продолжения откладываются на тех же хордах из начала координат. Найти геометрическое место концов передвинутых продолжений. (Циссоида Диоклеса.)

136. Из начала координат проведена произвольная прямая, пересекающая окружность $x^2+y^2=ay$ и прямую $y=a$ в точках A и B. Из точки A проводится прямая параллельно оси Ox, а из точки B — параллельно оси Oy. Найти геометрическое место точки пересечения этих прямых. (Верзьера Марии Аньези.)

137. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ есть величина постоянная, равная b^2. (Овалы Кассини.)

138. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек равно квадрату половины расстояния между ними. (Лемниската Бернулли.)

139. Найти геометрическое место точек, между расстояниями которых до двух данных точек существует линейная зависимость $r_1-ar_2=b$. (Овалы Декарта.)

140. Через точку $(0, -a)$ проводятся прямые, пересекающие ось Ox. На каждой из них, по обе стороны от точки пересечения с Ox, откладываются отрезки длиною h. Найти геометрическое место концов этих отрезков. (Конхоида Никомеда.)

141. Из точки A на окружности диаметра a проводятся секущие. На каждой из них по обе стороны от другой точки пересечения с окружностью откладываются отрезки длиною b. Найти геометрическое место их концов. (Улитка Паскаля.)

142. Нить, намотанная на окружность $x^2+y^2=a^2$, разматывается, оставаясь туго натянутой. Найти геометрическое место, описываемое ее концом, если начальное положение конца нити было в точке $(a, 0)$. (Эвольвента круга.)

143. Круг радиуса a катится без скольжения по оси Ox. Найти уравнение кривой, описанной той точкой круга, которая в начальный момент касалась оси Ox в начале координат. (Циклоида.)

144. Найти уравнение кривой, описанной точкой круга радиуса a, катящегося без скольжения по оси Ox, если в тот момент, когда круг касался оси Ox в начале координат, эта точка занимала положение $(0, a-b)$. (Трохоида.)

145. Круг радиуса a катится без скольжения снаружи по кругу $x^2+y^2=a^2n^2$. Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси Ox. (Эпициклоида.)

146. Круг радиуса a катится по кругу $x^2+y^2=a^2n^2$ внутри его без скольжения. Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси Ox. (Гипоциклоида.)

147. Показать, что при $n=4$ гипоциклоида обращается в астроиду $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(4a)^{\frac{2}{3}}$.

148. При $n=1$ эпициклоида обращается в кривую, называемую кардиоидой. Показать, что уравнение кардиоиды в соответственно выбранных полярных координатах имеет вид: $r=a(1+\cos\varphi)$.

149. Показать, что кардиоида (см. предыдущую задачу) есть частный случай улитки Паскаля (см. задачу 141).

150. Показать, что при $n=2$ гипоциклоида обращается в прямую. (Теорема Кардана.)

151. Прямоугольный треугольник с катетами a и b скользит концами их по осям координат. Найти геометрическое место вершины прямого угла.

152. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что одна из их сторон лежит на основании треугольника.

153. Найти геометрическое место центров параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник, стороны которых параллельны диагоналям четырехугольника.

154. Концы основания треугольника — в точках $(\pm a, 0)$. Один из углов при основании вдвое больше другого. Найти геометрическое место вершины треугольника.

155. Концы основания треугольника — в точках $(\pm a, 0)$. Разность углов при основании равна φ. Найти геометрическое место вершины.

156. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, образуемых прямыми $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{k}+\frac{y}{3-k}=1$.

157. Три вершины параллелограмма, направления сторон которого даны, скользят по трем данным прямым. Каково геометрическое место четвертой вершины?

158. Четыре стороны изменяющегося параллелограмма все время проходят через четыре данные точки на прямой. Показать, что диагонали параллелограмма тоже проходят через некоторые неподвижные точки.

159. Стороны прямого угла, положение которого меняется, проходят все время через две данные точки. Доказать, что также биссектриса его проходит через постоянную точку.

160. Сторона переменного квадрата проходит через начало координат, а концы ее скользят по прямым, параллельным оси Ox. Каково геометрическое место двух других вершин?

161. Найти геометрическое место середин хорд круга $x^2+y^2=$ $=a^2$, проходящих через точку $P(c, 0)$ внутри круга.

162. Прямые a, b и c вращаются около точек A, B, C, лежащих на одной прямой. При этом точка пересечения прямых a и b скользит по прямой P, а точка пересечения прямых a и c скользит по прямой Q. Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых b и c скользит по прямой R, проходящей через точку пересечения прямых P и Q.

163. Доказать теорему Дезарга: если вершины двух треугольников лежат на трех прямых, исходящих из одной точки, то три точки пересечения соответствующих пар сторон треугольников лежат на одной прямой.

§ 4. Кривые второго порядка в простейшем виде

164. Найти уравнение параболы, проходящей через точку (6, 9), с вершиной в начале координат и симметричной относительно оси Oy.

165. Ось Ox — ось симметрии параболы с вершиной в начале. Найти уравнение этой параболы, зная, что она проходит через точку (2, 2).

166. Параболическое зеркало рефлектора телескопа в Симеизе имело фокусное расстояние 5,4 *м* и 1,02 *м* в диаметре. Найти глубину параболической вогнутости зеркала.

167. Зеркало автомобильного фонаря имеет в разрезе форму параболы. Диаметр зеркала 20 *см*, глубина 10 *см*. Найти положение фокуса зеркала.

168. Доказать, что все параболы $y^2=2px$ геометрически подобны.

169. На параболе $y^2=24x$ взята точка на расстоянии 14 ед. от фокуса. Определить ее расстояние от вершины.

2 Зак. 2666. Сборник задач, I

170. Доказать, что произведение ординат концов любой хорды, проходящей через фокус параболы $y^2=2px$, есть величина постоянная.

171. На параболе $y^2=2px$ найти точку, такую, что ее расстояния от фокуса и от вершины находятся в отношении $7:8$.

172. Дана парабола $y^2=4-4x$ и прямая $x+y=1$. Через одну из точек их пересечения провести другую параболу с той же осью и фокусом.

173. Составить уравнение параболы с осью симметрии OX, проходящей через точки $(a, 0), (0, b)$. При каком соотношении между a и b фокус параболы будет в начале координат?

174. Даны параболы $y^2=4x+8$ и $4x+y^2-4y-8=0$. Найти уравнение их общей хорды и точку ее пересечения с прямой, соединяющей фокусы.

175. Даны три точки $(-5, 2)$, $(1, -4)$ и $(5, 12)$, лежащие на параболе с осью, параллельной оси OY. Найти вершину, фокус и директрису этой параболы.

176. Через три точки $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ и $(6, 1)$ провести окружность и параболу с осью, параллельной оси Oy. Определить расстояние центра окружности от вершины параболы.

177. Доказать, что уравнение $yy_1=p(x+x_1)$ изображает касательную к параболе $y^2=2px$ в точке (x_1, y_1).

178. Даны параболы $y^2+4x=0$ и $y^2=16x+80$. Проверить, что они софокусны и что касательные в точках пересечения взаимно перпендикулярны.

179. Даны три точки $(-3, 2)$, $(-1, 1)$ и $(3, 5)$, провести через них параболу с осью, параллельной оси Oy, и окружность и найти углы, под которыми они пересекаются.

180. Доказать, что касательная к параболе $y^2=2px$, имеющая угловой коэффициент m, изображается уравнением

$$y=mx+\frac{p}{2m}.$$

181. Найти касательную к параболе $4y=x^2$ в точке $(2, 1)$.

182. Через точку $(0, -4)$ провести касательную к параболе $4y=x^2$.

183. Через точку $(-4, -1)$ провести касательную к параболе $y^2=2x$.

184. Доказать, что касательные, проведенные в концах хорды параболы, проходящей через фокус, взаимно перпендикулярны.

185. Дана парабола $y^2=2px$. Найти угол между касательными к ней, проведенными из точки $(-p, p)$.

186. Найти расстояние от фокуса параболы $y^2=2px$ до касательной к ней, угол которой с осью равен α.

187. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней.

188. Дана парабола $4y+x^2-4x-12=0$ и прямая $y-2x=0$. Провести касательную, параллельную данной прямой.

189. Найти общие касательные к параболе $y^2=8x$ и окружности $x^2+y^2=2$.

190. Даны две параболы: $y^2=2px$ и $y^2=2p(x+a)$. Доказать, что отрезки касательной к первой параболе, лежащие внутри второй, делятся точкой касания пополам.

191. Найти геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

192. Ординаты окружности $x^2+y^2=36$ уменьшены в два раза. Найти уравнение полученной кривой.

193. Найти полуоси эллипса $3x^2+5y^2-30=0$.

194. Найти уравнение эллипса, проходящего через точки (1, 4) и (7, 2) и симметричного относительно осей Ox и Oy.

195. Доказать, что эллипсы с одинаковым эксцентриситетом e геометрически подобны, т. е. могут быть совмещены друг с другом при соответствующем увеличении одного из них.

196. Меридиан земного шара — эллипс, у которого сжатие, т. е. $\frac{a-b}{a}$, равно $\frac{1}{298}$. Найти его эксцентриситет.

197. Орбита земного шара — эллипс с полуосью $a=150\cdot 10^6$ *км* и эксцентриситетом $e=0{,}017$. Зная, что Солнце в фокусе этого эллипса, найти, на сколько кратчайшее расстояние Земли до Солнца (4 января) короче длиннейшего (3 июля).

198. Даны две точки, лежащие на эллипсе, оси которого служат осями координат $(3;\ 2{,}4)$ и $(4;\ 1{,}8)$. Найти этот эллипс и проекции фокусов на хорду, соединяющую данные точки.

199. Даны эллипс и парабола $y^2=18x-0{,}36x^2$, $y^2=18x$. Найти расстояние фокуса параболы от ближайшего фокуса эллипса.

200. Найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

201. Директрисы гиперболы делят расстояние между фокусами на три равные части. Найти ее эксцентриситет.

202. Фокусы эллипса делят расстояние между директрисами на три равные части. Найти его эксцентриситет.

203. Каким станет уравнение равнобочной гиперболы $x^2-y^2=a^2$, если повернуть оси на угол $\alpha=-45°$?

204. Расстояние между фокусами эллипса равно 2, расстояние между директрисами 10. Найти полуоси.

205. Эксцентриситет гиперболы равен 2. Найти угол между асимптотами.

206. Малая ось эллипса видна из фокуса под прямым углом. Найти эксцентриситет.

207. Дана гипербола $x^2-y^2=8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку (4, 6).

208. Дан эллипс $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

209. Найти общее уравнение эллипсов и гипербол с фокусами в точках $(\pm c, 0)$.

210. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение гиперболы, имеющей фокусы в вершинах данного эллипса, а вершины — в фокусах.

211. Дан эллипс $\frac{x^2}{33}+\frac{y^2}{8}=1$. Найти софокусную с ним гиперболу, имеющую эксцентриситет, равный 1,25.

212. Найти эллипс и гиперболу, проходящие через точку (6, 4) и софокусные с гиперболой $x^2-y^2+8=0$.

213. Оси координат служат осями гиперболы, проходящей через точку (6, 5) и имеющей эксцентриситет, равный 1,5. Составить уравнение.

214. Найти точки, в которых гипербола $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ пересекается прямыми, параллельными асимптотам и проходящими через правый фокус.

215. Найти расстояние фокуса гиперболы $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ от асимптоты.

216. Полярное уравнение линии второго порядка есть $r(5+3\cos\varphi)=16$. Найти ее уравнение относительно осей симметрии.

217. То же для кривой $r(4+5\cos\varphi)=9$.

218. Доказать равенство

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_n}=\frac{n}{p},$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — радиусы-векторы, проведенные из фокуса под углами $\frac{2\pi}{n}$ друг к другу.

219. Доказать равенство:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

где r_1 и r_2 — взаимно перпендикулярные радиусы-векторы, проведенные из центра эллипса.

220. Доказать равенство:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\ldots+\frac{1}{r_n^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — радиусы-векторы из центра эллипса, составляющие между собой углы $\frac{2\pi}{n}$.

221. Найти уравнения диаметров эллипса $x^2+6y^2=2$, длина которых равна 2.

222. Доказать, что при проектировании взаимно перпендикулярные диаметры круга переходят в сопряженные диаметры эллипса.

223. Пользуясь теоремой о том, что площадь проекции равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, доказать теорему Аполлония:

$$a_1 b_1 \sin\omega = ab,$$

где a_1 и b_1 — длины сопряженных полудиаметров эллипса, а ω — угол между ними.

224. Исходя из результата задачи 222, доказать другую теорему Аполлония, в силу которой

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2.$$

225. Найти угол между равными сопряженными диаметрами эллипса $x^2 + 3y^2 = 6$.

226. Найти длины сопряженных диаметров гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, угол между которыми равен 45°.

227. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $x^2 + 15y^2 = 5$, угол между которыми равен 150°.

228. Угол между сопряженными диаметрами эллипса равен 120°. Один из них вдвое больше другого. Найти эксцентриситет.

229. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{5} + 3y^2 = 1$, составляющих угол 150°.

230. Длины сопряженных диаметров эллипса $8x^2 + 17y^2 = 136$ относятся как 4 : 3. Найти уравнения этих диаметров.

231. Сумма длин сопряженных диаметров 6, угол между ними 150°, а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$. Найти оси эллипса.

232. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $3x^2 + 5y^2 = 15$, составляющих наибольший угол.

233. Найти угол между сопряженными диаметрами гиперболы, зная отношение их длин m и эксцентриситет e.

234. Найти угол между асимптотами гиперболы, зная, что сопряженные диаметры ее образуют угол 45° и относятся, как 2 к 3.

235. Найти длины сопряженных диаметров гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$, сумма которых относится к сумме осей, как 5 к 2.

236. Доказать, что уравнение $Axx_1 + Byy_1 + C = 0$ изображает касательную к кривой $Ax^2 + By^2 + C = 0$ в точке (x_1, y_1).

237. Дан эллипс $4x^2 + y^2 = 8$ и прямая $y + 2x = 0$. Провести к эллипсу касательные, параллельные этой прямой, и найти расстояние между касательными.

238. Через точку (2, —1) провести касательную к эллипсу $x^2 + 9y^2 = 9$.

239. Через точку (3, —6) провести касательную к гиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$.

240. Через точку $(1, -2)$ провести касательную к гиперболе $x^2-y^2=1$.

241. Провести параллельно прямой $2x-3y=0$ касательные к эллипсу $x^2+4y^2=4$.

242. Параллельно прямой $10x+3y=0$ провести касательные к гиперболе $4x^2-y^2=4$.

243. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ в точках ее пересечения с прямою $3x=5y$ и расстояние между этими касательными.

244. Даны: эллипс $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$ и гипербола $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. Проверить, что касательные к ним в точках пересечения взаимно перпендикулярны.

245. Даны два эллипса: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$ и $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{3}=1$. Найти касательные к первому эллипсу, проходящие через фокусы второго.

246. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{21}=1$, проходящие через фокус сопряженной гиперболы.

247. Найти угол между касательными к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, проведенными из точки $(1, 2)$.

248. Доказать, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеющая угловой коэффициент m, изображается уравнением

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

249. Доказать, что касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sigma$, имеющая угловой коэффициент m, изображается уравнением

$$y=mx\pm\sqrt{\sigma(a^2m^2-b^2)}.$$

250. Доказать, что хорды, соединяющие точки пересечения окружности $x^2+y^2=a^2+b^2$ с осями координат, касаются эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

251. Показать, что эллипсы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ касаются прямых $\pm x\pm y=c$, если $a^2+b^2=c^2$.

252. Доказать, что геометрическое место точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ виден под прямым углом, есть окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$.

253. Показать, что у гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ произведение расстояний фокусов от касательной равно b^2.

§ 5. Кривые второго порядка, заданные уравнением в общем виде

254. Определить вид линий, заданных уравнениями 2-го порядка:

a) $xy = 0$;
b) $x^2 - y^2 = 0$;
c) $(x - y)^2 = 0$;
d) $(x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0$;
e) $x^2 + y^2 = 0$;
f) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

255. Определить вид линий, заданных уравнениями 2-го порядка:

a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$;
b) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
c) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

256. Определить k так, чтобы уравнение

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + k = 0$$

изображало пару пересекающихся прямых.

257. Определить k так, чтобы уравнение

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + k = 0$$

изображало точку.

258. Подобрать λ так, чтобы уравнение

$$x^2 + 2\lambda xy + 4y^2 + 2x + \lambda y = 0$$

изображало пару прямых, и найти их.

259. В уравнении

$$2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$$

подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы уравнение изображало пару параллельных прямых.

260. Найти уравнения асимптот кривой

$$2x^2 - xy + 3x - y - 1 = 0.$$

261. Показать, что уравнение

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda = 0,$$

где $\lambda \neq 0$ и $ab_1 - a_1b \neq 0$, изображает гиперболу с асимптотами

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

262. Найти уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые $x - 1 = 0$ и $y - 1 = 0$ и проходящей через точку (2, 2).

263. Доказать, что при любом значении коэффициентов λ и μ кривая $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ проходит через точки пересечения кривых $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Здесь f_1 и f_2 — полиномы относительно x и y.

264. Пусть $s_{kl} = 0$ — уравнение прямой $A_{kl}x + B_{kl}y + C_{kl} = 0$, проходящей через точки k и l. Доказать, что при любых λ и μ

уравнение

$$\lambda s_{12}s_{34}+\mu s_{13}s_{24}=0$$

изображает линию 2-го порядка, проходящую через четыре данные точки.

265. Найти уравнение линии 2-го порядка, проходящей через точки (1, 1), (2, —1), (1, —2), (—1, 1), (3, 0).

266. Найти линию 2-го порядка по пяти ее точкам: (3, 1), (2, 1), (—7, 1), (—2, 0), (0, 1).

267. Найти параболу, проходящую через четыре точки: (0, —1), (0, 3), (—1, 0), (3, 0).

268. Найти линию 2-го порядка, проходящую через точку (1, 1) и точки пересечения кривой $x^2-2xy+2x-2y-17=0$ с прямыми $y=0$ и $x+2y+3=0$.

269. Через начало координат проведены хорды AB и CD окружности $x^2+(y-h)^2=a^2$. Рассматривая пучок кривых 2-го порядка, проходящих через концы хорд, доказать, что прямые AD и CB, а также BD и AC пересекают ось Ox на одинаковых расстояниях от начала.

270. На кривой 2-го порядка взяты шесть точек: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Уравнения сторон полученного шестиугольника соответственно обозначены следующим образом:

$$s_{12}=0,\ s_{23}=0,\ s_{34}=0,\ s_{45}=0,\ s_{56}=0,\ s_{61}=0.$$

При этих условиях и при любом выборе коэффициентов λ и μ кривая 3-го порядка

$$\lambda s_{12}s_{34}s_{56}+\mu s_{23}s_{45}s_{61}=0$$

проходит через 6 данных точек и через 3 точки пересечения пар противоположных сторон.

Исходя отсюда, доказать теорему Паскаля: в шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, три точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

§ 6. Центр, диаметры. Упрощение уравнений кривых второго порядка

Полином $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$, дополненный до однородного введением степеней буквы z, обращается в тройничную квадратичную форму

$$f=f(x,\ y,\ z)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2.$$

Частные производные его по x, y и z выражаются равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2Ax+By+Dz;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Bx+2Cy+Ez;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=Dx+Ey+2Fz.$$

Значения их при $z=1$ обозначим через $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$. Определитель из коэффициентов при x, y и z в формулах, выражающих частные производные, называется дискриминантом Δ квадратичной формы трех переменных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

Его минор $\delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$ есть дискриминант квадратичной формы двух переменных $Ax^2 + Bxy + Cy^2$. В теории квадратичных форм важно тождество, которое можно назвать формулой Тэйлора:

$$f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta + f(\xi, \eta, \zeta).$$

Из этой формулы при $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ получается тождество Эйлера:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f(x, y, z).$$

Другое следствие той же формулы выражается равенством:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta = \frac{\partial f}{\partial \xi}x + \frac{\partial f}{\partial \eta}y + \frac{\partial f}{\partial \zeta}z.$$

В дальнейшем для краткости будем писать:

$$f(x, y, 1) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$
$$f(x, y, 0) = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

271. Пусть (x, y) — середина хорды кривой $f(x, y, 1) = 0$, а $(x + \xi t, y + \eta t)$ и $(x - \xi t, y - \eta t)$ — концы хорды. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \eta = 0.$$

272. Доказать, что середины хорд кривой $f(x, y, 1) = 0$, параллельных прямой $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta}$, лежат на прямой $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \eta = 0$ или, в полном виде:

$$(2Ax + By + D)\xi + (Bx + 2Cy + E)\eta = 0$$

(диаметр, сопряженный с данным направлением).

273. Показать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η) уравнение $f(x, y, 1) = 0$ переходит в уравнение

$$f(x_1, y_1, 0) + \frac{\partial f}{\partial \xi}x_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta}y_1 + f(\xi, \eta, 1) = 0.$$

274. При $4AC - B^2 \neq 0$ все диаметры проходят через точку (ξ, η), где пересекаются прямые $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0$. Показать, что при переносе начала в точку, выбранную таким образом, уравнение

$f(x, y, 1) = 0$ переходит в такое:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + \frac{1}{2}(D\xi + E\eta + 2F) = 0.$$

Здесь $D\xi + E\eta + 2F$ есть значение $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$ при $x = \xi$, $y = \eta$.

275. Перенести начало координат в центр кривой $x^2 + xy + 2x + y - 2 = 0$ и составить новое уравнение кривой.

276. Упростить уравнение кривой

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0,$$

перенеся начало координат в центр.

277. Упростить уравнение линии

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 3 = 0,$$

перенеся начало координат в тот ее центр, абсцисса которого равна единице.

278. Показать, что прямая $7x + y + 6 = 0$ проходит через центры кривых

$$3x^2 - 7xy - 6y^2 + 3x - 9y + 5 = 0$$

и

$$3x^2 - 5xy + 6y^2 + 11x - 17y + 13 = 0.$$

279. Найти оси симметрии эллипса

$$x^2 + xy + y^2 - x + y - 1 = 0.$$

280. Найти фокусы (относительно старых осей координат) гиперболы

$$x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0.$$

281. Определить эксцентриситет линии

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0.$$

282. Упростить уравнение кривой $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$, перенеся начало в центр, а затем повернув оси на соответствующий угол.

283. То же для кривой $x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0$.

284. Упростить уравнение параболы

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

повернув оси так, чтобы новое уравнение не содержало x_1y_1, и перенеся затем начало так, чтобы в окончательном уравнении осталось лишь два члена.

285. Доказать, что при $4AC - B^2 = 0$, $A > 0$ (так что можно положить $A = a^2$) имеет место тождество:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = (ax + by + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

где $\alpha = D - 2ah$, $\beta = E - 2bh$, $\gamma = F - h^2$.

286. Доказать, что в тождестве предыдущей задачи число h можно выбрать так, чтобы прямые $ax+by+h=0$ и $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ были взаимно перпендикулярны, если только числа D и E не пропорциональны числам a и b.

287. Упростить уравнение кривой

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0$$

с помощью тождества:

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=(x+y+h)^2+\alpha x+\beta y+\gamma,$$

подобрав h так, чтобы прямые $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ и $x+y+h=0$ были взаимно перпендикулярны. При этом формулы преобразования координат имеют вид:

$$y_1=\frac{x+y+h}{\sqrt{2}}, \qquad x_1=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

288. Тем же способом упростить уравнение параболы

$$16x^2+24xy+9y^2-170x+310y-465=0.$$

289. Упростить уравнение параболы

$$9x^2+30xy+25y^2+4x-16y+8=0.$$

290. При данных A, B и C и соответственно подобранном значении λ справедливо тождество:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2,$$

где α и β — вещественные или мнимые коэффициенты. Доказать, что такими значениями λ являются корни уравнения

$$4\lambda^2-4(A+C)\lambda+4AC-B^2=0.$$

291. Уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ изображает пару прямых, вещественных или мнимых, тогда и только тогда, если дискриминант Δ равен нулю. Пользуясь этим, доказать, что при любых преобразованиях координат величина Δ не изменяется.

292. Пользуясь инвариантностью величин $A+C$, $4AC-B^2$ и дискриминанта Δ, доказать, что при $4AC-B^2\neq 0$ уравнение

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

после упрощения приводится к виду:

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=\frac{\Delta}{B^2-4AC}.$$

Здесь λ_1 и λ_2 — корни уравнения $\lambda^2-2(A+C)\lambda+4AC-B^2=0$.

293. Доказать, что уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ при $4AC-B^2=0$ и $\Delta\neq 0$ можно привести к виду

$$(A+C)x_1^2=\pm\sqrt{\frac{-\Delta}{2(A+C)}}y_1.$$

Привести к простейшему виду уравнения следующих линий:

294. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$
295. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$
296. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0.$
297. $8x^2-4xy+5y^2+4x-10y=319.$
298. $6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$
299. $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0.$
300. $7x^2+24xy+38x+24y+175=0.$
301. $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0.$
302. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0.$
303. $2x^2-72xy+23y^2+68x+26y+28=0.$

§ 7. Сопряженные диаметры. Оси симметрии. Асимптоты

304. Найти уравнение гиперболы, проходящей через точки $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ и имеющей асимптоту $x+y-1=0$.

305. Найти равнобочную гиперболу, зная ее асимптоту $x-y+1=0$ и точки гиперболы $(1, 1)$, $(2, 1)$.

306. Составить общее уравнение равнобочных гипербол с центром в точке (a, b).

307. Парабола проходит через точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$, а прямая $x+y+1=0$ — ее ось. Найти параболу.

308. Точки $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$ — на параболе. Ее ось параллельна прямой $y=x$. Найти параболу.

309. Парабола касается оси Oy в начале координат. Прямая $x+y+1=0$ — касательная к вершине. Найти параболу.

310. Прямая $x+y+1=0$ — ось кривой 2-го порядка, а точки $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$ лежат на кривой. Найти уравнение кривой.

311. Доказать, что у кривой

$$A(ax+by+c)^2+B(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+C=0$$

прямые $ax+by+c=0$ и $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ — сопряженные диаметры, если $a\beta\neq\alpha b$.

312. Доказать, что у параболы

$$(ax+by+c)^2+A(\alpha x+\beta y+\gamma)=0$$

прямая $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ — касательная, а $ax+by+c=0$ — диаметр, сопряженный с ее направлением. При этом подразумевается, что $a\beta\neq\alpha b$.

313. Найти линию 2-го порядка, у которой прямые $x-2y-1=0$ и $2x-y+1=0$ — сопряженные диаметры и на которой лежат точки (1, 0) и (0, 1).

314. Парабола проходит через точку (0, 0), прямая $x+y-1=0$ — диаметр параболы, а $x+2y-1=0$ — касательная, сопряженная с ним. Найти параболу.

315. Прямая $x+y+1=0$ — касательная, а $x-y+1=0$ — сопряженный с ней диаметр параболы с параметром $\sqrt{2}$. Найти параболу.

316. Прямые $x+y-1=0$ и $x-y+1=0$ — сопряженные диаметры эллипса с полуосями 2 и 1. Найти эллипс.

317. Прямые $x+2y-4=0$ и $x-3y+2=0$ — сопряженные диаметры эллипса с полуосями $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найти уравнение эллипса.

318. Доказать, что отрезки любой прямой, заключенные между гиперболой и ее асимптотами, равны между собой.

§ 8. Фокусы и директрисы

319. Найти фокус и директрису параболы

$$x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0.$$

320. Найти фокусы и директрисы кривой

$$3x^2-4xy-2x+4y-5=0.$$

321. Найти фокусы и директрисы кривой

$$8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0.$$

322. Кривая 2-го порядка проходит через начало координат, ее фокус — в точке $(-1, 1)$, а соответствующая директриса имеет уравнение $x+y-2=0$. Найти кривую.

323. Найти эллипс, проходящий через точку (4, 2) и имеющий фокусы в точках (4, 3) и $(0, -1)$.

324. Найти эллипс с фокусами в точках (1, 2), (2, 1), проходящий через точку (5, 5).

325. Найти равнобочную гиперболу по директрисе $x+y-1=0$ и фокусу (1, 1).

326. Найти параболу по ее точкам (1, 1), (1, 2) и директрисе $x+y-1=0$.

327. Кривая 2-го порядка проходит через точку $(0, -1)$, имеет центром (1, 1), а директрисой прямую $x+2y+1=0$. Найти кривую.

328. Найти кривую 2-го порядка по ее точкам (0, 1), (1, 0), (0, 2) и фокусу (1, 1).

329. Найти кривую 2-го порядка по директрисе $x+y+1=0$, оси $y=x$ и точкам (0, 0) и (1, 0).

330. Найти кривую 2-го порядка по точкам (4, 5), (-3, 4), фокусу (1, 1) и оси симметрии $x+y-2=0$.

331. Найти параболу по ее вершине (0, 0) и фокусу (1, 1).

332. Найти гиперболу по асимптотам $x+y-1=0$, $x-y+1=0$ и фокусу (0, 2).

333. Найти геометрическое место фокусов парабол, проходящих через точку (1, -1) и имеющих директрисой прямую $x+y+1=0$.

334. Найти геометрическое место вершин парабол, проходящих через данную точку и имеющих данную директрису.

335. Найти геометрическое место центров равнобочных гипербол, проходящих через точку (0, 0) и имеющих директрисой прямую $x+y+1=0$.

336. Каково геометрическое место фокусов кривых 2-го порядка, вписанных в данный параллелограмм?

§ 9. Касательные к кривым второго порядка. Полюсы и поляры

Если точка (x_1, y_1) лежит на кривой 2-го порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

то уравнение касательной к кривой в этой точке можно написать в любой из двух форм:

$$(2Ax_1+By_1+D)\,x+(Bx_1+2Cy_1+E)\,y+Dx_1+Ey_1+2F=0,$$

$$(2Ax+By+D)\,x_1+(Bx+2Cy+E)\,y_1+Dx+Ey+2F=0.$$

Если же точка (x_1, y_1) не лежит на кривой, то те же уравнения изображают некоторую прямую, называемую полярой точки (x_1, y_1). Сама точка (x_1, y_1) называется полюсом этой поляры.

337. Найти уравнение касательной в начале координат к кривой $5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$.

338. Найти касательную к кривой $x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0$, параллельную прямой $2x+2y-1=0$.

339. Найти уравнения касательных к эллипсу $x^2+xy+y^2=3$, параллельных осям координат.

340. Найти уравнение касательной к кривой $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y\quad 3=0$, проходящей через точку (2, 1).

341. Через точку (4, -2) провести касательную к кривой $x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0$.

342. Доказать теорему: если полюс движется по прямой, то поляра вращается вокруг некоторой точки.

343. Доказать теорему: если поляра точки M проходит через точку N, то поляра точки N проходит через точку M.

344. Доказать теорему Брианшона: диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около кривой 2-го порядка, пересекаются в одной точке.

345. Доказать, что кривая 2-го порядка определяется своими пятью касательными.

346. Доказать, что полюсы касательных к некоторой кривой 2-го порядка, взятые относительно данной кривой 2-го порядка, лежат на кривой 2-го порядка.

347. Найти геометрическое место полюсов касательных к окружности радиуса R относительно концентрической окружности радиуса r.

348. Если одна из сторон обращается в нуль или две стороны служат продолжением одна другой, то шестиугольник обращается в пятиугольник. Во что переходят при этом теоремы Паскаля (задача 270) и Брианшона (задача 344)?

349. Такой же вопрос — для дальнейших случаев вырождения, когда шестиугольник переходит в четырехугольник или треугольник.

§ 10. Разные задачи

350. Доказать, что площадь, заключенная между касательной к гиперболе и ее асимптотами, имеет постоянную величину.

351. Доказать, что произведение отрезков секущей между асимптотами и точкой на гиперболе равно квадрату полудиаметра, параллельного секущей.

352. Доказать, что у гиперболы точка касания делит пополам отрезок касательной между асимптотами.

353. Найти уравнение кривой 2-го порядка по ее фокусу (0, 0) и трем касательным: $x-y-1=0$, $2x-y-1=0$, $x+y-1=0$.

354. Найти параболу по точке на ней (5, 0), фокусу (3, 2) и касательной $x-3y-7=0$.

355. Найти гиперболу по ее центру (1, 1), фокусу (3, 3) и касательной $x+2y-7=0$.

356. Найти геометрическое место точек касания касательных, проведенных из начала координат к параболе $[(x-a)^2+y^2-b^2](1+m^2)-(y-mx)^2=0$, где m — переменный параметр.

357. Найти геометрическое место проекций фокуса на касательные к кривой $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$.

358. Найти точку пересечения поляр точек, расположенных на директрисе.

359. Если a и b — длины двух взаимно перпендикулярных касательных к параболе $y^2=4x$, то $a^4b^4=(a^2+b^2)^3$. Доказать.

360. Найти геометрическое место точек касания для касательных данного направления к софокусным кривым $\frac{x^2}{a^2+h}+\frac{y^2}{b^2+h}=1$, h — переменный параметр.

361. Равнобочная гипербола проходит через начало координат и имеет асимптоту $x+y+1=0$. Найти геометрическое место точек пересечения второй асимптоты с касательной в начале координат.

362. Равнобочные гиперболы проходят через точку (1, 0) и касаются оси Oy в точке (0, 1). Найти геометрическое место центров.

363. Каково геометрическое место вершин равнобочных гипербол, проходящих через данную точку и имеющих данную асимптоту?

364. Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к данной параболе две нормали, составляющие между собой прямой угол?

365. Даны параболы $y^2=2px$ и $y^2=2p(x-a)$. Доказать, что хорды первой, касающиеся второй, делятся пополам точкой касания.

366. Две параболы имеют общую ось симметрии. Две прямые параллельны оси симметрии, Через точки их пересечения с параболами проводятся хорды. Доказать, что точки пересечения этих хорд лежат на одной прямой, какие бы пары параллельных прямых ни были взяты.

367. Каково геометрическое место вершин парабол с данными фокусом и касательной?

368. Доказать, что круг, описанный около треугольника, составленного из трех касательных к параболе, проходит через фокус.

369. Доказать, что равнобочная гипербола, описанная около треугольника, проходит через точку пересечения его высот.

370. Каково геометрическое место фокусов парабол с данными вершиной и касательной?

371. Из точки вне параболы можно провести три нормали к ней. Доказать, что вершина параболы и три основания нормалей лежат на одной окружности.

372. Даны кривая $Ax^2+By^2+C=0$ и точка $M(a, b)$. Около точки M, как центра, описываются окружности. Найти геометрическое место середин хорд, общих этим окружностям и данной кривой.

373. Дан четырехугольник $ABCD$. Каково геометрическое место таких точек M, что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна сумме площадей треугольников BMC и DMA?

374. С помощью результата предыдущей задачи доказать теорему Ньютона: в описанном около круга четырехугольнике середины диагоналей и центр этого круга лежат на одной прямой.

375. Прямой угол, вершина которого M находится на кривой 2-го порядка, вращается около вершины, а A и B — точки пересечения его сторон с кривой, отличные от M.

Доказать, что прямая AB вращается около точки, расположенной на нормали к кривой в точке M.

376. Около точки A внутри данного круга вращается прямой угол. В точках пересечения его сторон с окружностью проводятся касательные к кругу. Найти геометрическое место точек пересечения этих касательных.

377. Переменный круг касается эллипса в данной точке. Каково геометрическое место точек пересечения общих касательных?

378. Фокусы эллипса соединяются радиусами-векторами с переменной точкой эллипса. Каково геометрическое место центров кругов, вписанных в треугольники, составленные из фокальной прямой и радиусов-векторов?

379. Инверсия, или преобразование обратными радиусами-векторами, состоит в том, что переменную точку M заменяют другой точкой M_1, лежащей на прямой OM так, что $OM \cdot OM_1 = a^2$. Здесь O — данная точка, a — данная величина. Доказать, что при инверсии линия $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ переходит в линию $A_1(x^2+y^2)+B_1x+C_1y+D_1=0$, т. е. круги или прямые переходят в круги или прямые (не обязательно соответственно).

380. Доказать, что инверсией относительно начала координат гипербола $x^2-y^2=a^2$ переводится в лемнискату Бернулли:

$$(x^2+y^2)^2 = b^2(x^2-y^2).$$

381. Доказать, что инверсия эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно начала координат с радиусом инверсии, равным $\sqrt{ab}$, дает кривую

$$(x^2+y^2)^2 = b^2x^2+a^2y^2.$$

382. Гипербола, конгруэнтная гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a>b$, вписана в угол между осями координат и скользит по ним. Доказать, что ее центр движется по окружности $x^2+y^2=a^2-b^2$.

383. Эллипс с полуосями a и b касается осей координат и скользит по ним. Доказать, что его центр движется по окружности $x^2+y^2=a^2+b^2$.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Векторы и координаты в пространстве

Орты прямоугольных осей OX, OY, OZ большей частью обозначают соответственно $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

384. Проекции вектора на оси Ox, Oy, Oz равны $(1, -4, 8)$. Найти длину вектора и косинусы его углов с осями.

385. Найти сумму векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$; $\mathbf{c}=-6\mathbf{i}-9\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, и длину этого вектора.

386. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, если $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

387. Вычислить векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ векторов предыдущей задачи.

388. Проверить тождества:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2\mathbf{a}\times\mathbf{b};\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2.$$

389. Из последнего тождества предыдущей задачи получить тождество Лагранжа

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2+$$
$$+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2.$$

390. Показать, что если $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, то $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

391. Найти угол между векторами $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

392. Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz.

393. В треугольнике ABC найти величину стороны AB и угол BAC, если известны координаты вершин: $A(2, -3, 1)$, $B(4, 11, 6)$, $C(4, -4, 3)$.

394. Воспользовавшись формулой для вычисления векторного произведения, найти площадь треугольника ABC, зная координаты вершин $A(-2, 1, 3)$, $B(2, -1, 7)$, $C(11, 2, -5)$.

395. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление CD, если известны точки $A(1, -2, 3)$, $B(4, -4, -3)$, $C(2, 4, 3)$, $D(8, 6, 6)$.

396. Проверить, что векторы $7\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ и $6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ могут быть взяты за ребра куба. Найти третье ребро куба.

397. Вычислить смешанное (векторно-скалярное) произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

398. Вычислить следующие двойные векторные произведения трех векторов предыдущей задачи: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ и $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

399. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершин $A(2, 1, 5)$, $B(4, 0, 8)$, $C(6, -2, 6)$, $D(5, 0, 3)$.

400. Вычислить высоту тетраэдра $ABCD$ предыдущей задачи, опущенную из точки D.

401. Определить плечо вектора $\overline{AB}$ относительно точки C, т. е. длину перпендикуляра из точки C на прямую AB. Известны положения точек $A(2, 0, 3)$, $B(4, 6, 0)$ $C(1, -3, 8)$.

402. Проверить тождество $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$.

403. Доказать формулу: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}; & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}; & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$.

404. При каком значении m векторы $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+m\mathbf{k}$; $\mathbf{b}=\mathbf{j}$; $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+\mathbf{k}$ компланарны и, значит, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$.

405. Решить предыдущую задачу, исходя из соображения, что при компланарности $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеется равенство $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$, где λ и μ — скалярные множители.

406. Три вектора $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ называются взаимными с тремя некомпланарными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если $\Delta\mathbf{a}^*=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\Delta\mathbf{b}^*=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{c}^*=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, где $\Delta=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Доказать, что вектор $\mathbf{x}$, определяемый из системы уравнений $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=m$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=n$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=p$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и m, n, p заданы и $\Delta\neq 0$ имеет вид $\mathbf{x}=m\mathbf{a}^*+n\mathbf{b}^*+p\mathbf{c}^*$.

407. Представить в векторном виде решение обыкновенной системы $2x_1-x_2+x_3=m$, $x_1-3x_2-2x_3=n$, $3x_1-x_2-x_3=p$.

408. Проверить, что все векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие уравнению $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=m$, могут быть даны в таком виде: $\mathbf{x}=\frac{m}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — совершенно произвольный вектор.

409. Проверить, что по векторному уравнению $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ возможно найти $\mathbf{x}$ только, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, и в этом случае $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}+n\mathbf{a}$, где n — произвольный скалярный множитель.

410. Если заданы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем $\mathbf{a}$ перпендикулярен $\mathbf{b}$, то из двух векторных уравнений $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=m$ и $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{x}$ определяется однозначно. Проверить это и найти $\mathbf{x}$.

411. Определить вектор $\mathbf{x}$ из системы $\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}=3$, $\mathbf{x}\times\mathbf{i}=-2\mathbf{k}$.

412. Если трехгранный угол пересечь сферой единичного радиуса с центром в вершине трехгранного угла, то на поверхности сферы в пересечении получится сферический треугольник. Его стороны α, β, γ измеряют плоские углы трехгранного угла, а его углы A, B, C измеряют двугранные углы трехгранного угла.

Расположив орты ребер: 1) $\mathbf{e}_1$ по оси Oz, 2) $\mathbf{e}_2$ в плоскости xOz под углом α к оси Z, 3) $\mathbf{e}_3$ в некоторой меридиональной плоскости и сосчитав двояко $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$, получить теорему косинусов сферической тригонометрии

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

413. При таком же расположении ортов вычислить $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3$. Циклически переставляя орты, получить теорему синусов сферической тригонометрии $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

414. Если три орта составляют между собой углы α, β, γ, то объем параллелепипеда, построенного на них (синус Штаудта), равен $\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Проверить.

415. Найти объем параллелепипеда, ребра которого имеют длины 2, 3, 4, а плоские углы трехгранного угла 120°, 150°, 60°.

416. Проверить, что если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два непараллельных вектора, то векторы $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$, $\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}}{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}|}$ являются тремя взаимно перпендикулярными ортами. Найти их расположение относительно данных векторов.

417. Даны орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Найти орт, лежащий в плоскости $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образующий угол θ с вектором $\mathbf{e}_1$.

418. Найти орт, лежащий в плоскости векторов $\mathbf{r}_1 = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ между ними и составляющий угол 45° с $\mathbf{r}_1$.

419. Вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}$ повернуть на угол ω вокруг оси, имеющей направление орта $\mathbf{e}$ и проходящей через точку O.

420. Повернуть вектор $\overline{OM} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ около биссектрисы угла xOy на 60°.

421. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 - 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где буквами α, β, γ обозначены косинусы углов между старыми и новыми осями.

422. Косинусы углов между новыми и прежними осями даны таблицей:

	x_1	y_1	z_1
x	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
y	$-\frac{11}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{10}{15}$
z	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{14}{15}$	$-\frac{1}{3}$

Доказать, что у точек, для которых $x:y:z=4:-2:1$, новые координаты равны старым.

§ 2. Плоскость

423. Найти плоскость, образующую на осях координат отрезки 2, —3, 4.

424. Найти отрезки на осях, образуемые плоскостью $x+2y-3z+6=0$.

425. Найти плоскость, проходящую через точку (2, 1, —1) и образующую на осях Ox и Oz отрезки, равные соответственно 2 и 1.

426. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (0, 0, 0), (2, 1, 1) и (3, —2, 3).

427. Найти уравнения граней тетраэдра с вершинами в точках (1, 1, 1), (—1, 1, 1), (1, —1, 1), (1, 1, —1).

428. Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости $x-2y+z-1=0$ с осями координат.

429. Найти косинусы углов, образованных плоскостью $2x-2y+z-5=0$ с координатными плоскостями.

430. Найти синусы углов, образованных плоскостью $6x-2y-3z-6=0$ с осями координат.

431. Найти двугранный угол между плоскостями $2x+y-2z-4=0$ и $3x+6y-2z-12=0$.

432. Найти линейный угол того двугранного угла между плоскостями $x-y+z-1=0$ и $2x-y+z+2=0$, в котором лежит начало координат.

433. Через точку (1, —1, 1) провести плоскость, перпендикулярную к плоскостям $x-y+z-1=0$ и $2x+y+z+1=0$.

434. Через точку (0, 1, 2) провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x+2y-z=0$ и к плоскости xOy.

435. Через точки (1, 1, 1) и (2, 2, 2) провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+y-z=0$.

436. Лежат ли точки (2, 1, 1) и (2, 1, 3) по одну сторону от плоскости $x+2y-z-2=0$?

437. Найти объем тетраэдра по уравнениям его граней: $x+y+z-1=0$, $x-y-1=0$, $x-z-1=0$, $z-2=0$.

438. Найти геометрическое место точек (x, y, z) таких, что объем тетраэдра с вершинами (x, y, z), (1, 2, 1), (—1, 1, 1), (2, 1, 1) равен 10.

439. Найти расстояние точки (2, 1, 1) от плоскости $x+y-z+1=0$.

440. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y+z-1=0$ и $2x-4y+2z-1=0$.

441. Найти плоскость, равноудаленную от плоскостей $x+y-2z-1=0$ и $x+y-2z+3=0$.

442. На оси Oz найти точку, равноудаленную от плоскостей $12x+9y-20z-19=0$ и $16x-12y+15z-9=0$.

443. Найти геометрическое место точек на плоскости xOz, равноудаленных от плоскостей $2x+y-2z=3$ и $3x+12y-4z=26$.

444. На линии пересечения плоскостей $x+y+z-2=0$ и $x+2y-z-1=0$ найти точку, равноудаленную от плоскостей $x+2y+z+1=0$ и $x+2y+z-3=0$.

445. Найти плоскость, делящую пополам тот двугранный угол между плоскостями $x+2y-z-1=0$ и $x+2y+z+1=0$, в котором лежит точка $(1, -1, 1)$.

446. Найти плоскость, в два раза более удаленную от плоскости $x+y-z+1=0$, чем от плоскости $x+y-z-1=0$, и не расположенную между ними.

447. Найти плоскость, расположенную между плоскостями $x-2y+z-2=0$ и $x-2y+z-6=0$ и делящую расстояние между ними в отношении $1:3$.

448. Найти точку пересечения плоскостей: $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$, $x+2y-z-2=0$.

449. Доказать, что плоскости $x+y+2z-4=0$, $x+2y-z-2=0$, $2x-y-z=0$, $x+y+z-3=0$ пересекаются в одной точке.

450. Через точку пересечения плоскостей $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$, $x+y+z-3=0$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y+2z=0$, не находя точки пересечения.

451. Проверив, что плоскости $x-2y+2z-7=0$, $2x-y-2z+1=0$, $2x+2y+z-2=0$ взаимно перпендикулярны, принять их за новые плоскости координат, приписав новым осям такие направления, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Составить формулы перехода.

452. Найти общий вид уравнений плоскостей, пересекающих призму, образованную плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$, по равностороннему треугольнику.

453. В уравнении $x+y+\lambda z=0$ определить λ так, чтобы через Ox можно было провести только одну плоскость, составляющую угол 330° с плоскостью $x+y+\lambda z=0$.

454. Определить λ так, чтобы плоскости $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$ пересекались по прямой.

455. Доказать, что плоскости, проходящие через середины ребер тетраэдра перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в одной точке.

456. Доказать, что плоскости, делящие пополам двугранные углы тетраэдра, пересекаются в одной точке.

457. Через точку $(1, 4, 1)$ провести плоскость, касающуюся парабол $y=0$, $z^2=8x$ и $z=0$, $y^2=32x$.

458. В уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ все коэффициенты отличны от нуля. Доказать, что плоскость проходит через семь координатных углов.

§ 3. Прямая в пространстве

459. Найти плоскости, проектирующие прямую $x-y+2z+3=0$, $2x-y-z+1=0$ на плоскости координат.

460. Найти углы прямой $3x-y+2z=0$, $6x-3y+2z=2$ с осями координат.

461. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-2y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-y+2z+1=0. \end{cases}$$

462. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+z=0, \\ y-z+2=0. \end{cases}$$

463. Плоскость $x+y+z=a$ пересекается плоскостями $x=y$ и $3x=y$. Определить угол между этими линиями пересечения.

464. Прямая $x+y-z=0$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$ проектируется: 1) на плоскость xOz и 2) на плоскость yOz. Определить угол между этими проекциями.

465. Найти угол между прямой $x+y+3z=0$, $x-y-z=0$ и плоскостью $x-y-z+1=0$.

466. Провести прямую через точки (1, 2, 1) и (2, 1, 3).

467. Провести прямую через точки (1, 2, 1) и (1, 2, 3).

468. Через точки $A(2, -1, 3)$ и $B(0, 2, -1)$ проведена прямая. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью $3x-y+z=0$.

469. Точки $A(2, 1, 1)$ и $B(1, 2, 2)$ проектируются из начала координат на плоскость $x+y+z=10$. Найти координаты проекций A' и B' и расстояние $|A'B'|$ между этими точками.

470. Через точку (2, 1, 3) провести прямую, параллельную плоскости $x+y+z=a$ и пересекающую прямую $x=y$, $y=2z$.

471. Через точку (1, 2, 1) провести прямую, перпендикулярную плоскости $x+2y-z=0$.

472. Через точку (2, 1, 1) провести прямую, параллельную плоскостям $2x-y+1=0$, $y-1=0$.

473. Через точку $(-1, 2, 1)$ провести прямую, параллельную прямой $x+y-2z-1=0$, $x+2y-z+1=0$.

474. Через точку (2, 1, 1) провести прямую, параллельную плоскостям $x-y+z+2=0$, $x+y+2z-1=0$.

475. Через точку (2, 2, 1) провести плоскость, перпендикулярную прямой $x+2y-z+1=0$, $2x+y-z=0$.

476. Через точку (1, 1, 2) провести плоскость, параллельную прямым

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

477. Через точку (1, 2, 1) провести плоскость, параллельную прямым

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

478. Через прямую $2x-y+z-1=0$, $x+y-z=0$ и точку (2, 1, 1) провести плоскость.

479. Через прямую $x-1=0$, $x+2y-z-1=0$ провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x+y+z=0$.

480. Найти проекцию прямой $x-y-z=0$, $x-5y+z=10$ на плоскость $x+2y+3z=2$ и определить угол, составляемый этой проекцией с плоскостью xOy.

481. Через ось Oz провести плоскость, составляющую угол 60° с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=7$.

482. Через прямую $x=y=z$ провести плоскость, составляющую угол 45° с плоскостью $x=y$.

483. Прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$ проектируется из точки (5, 5, 5) на плоскость xOy. Найти уравнения проекции.

484. Через точку (1, 2, -1) провести прямую, пересекающую обе прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{3}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}$.

485. Через прямую $x+y+z=0$, $2x-y+3z=0$ провести плоскость, параллельную прямой $x=2y=3z$.

486. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $z=0$ и проходящей через перпендикуляр, опущенный из точки (1, -1, 1) на прямую $x=0$, $y-z+1=0$.

487. Найти уравнение и длину высоты треугольника, высекаемого на плоскости $3x-y+4z-12=0$ координатными плоскостями; высота опущена из вершины, лежащей на Oz.

488. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$ с плоскостью $x+y-z+1=0$.

489. Найти проекцию точки (2, 1, 1) на плоскость $x+y+3z+5=0$.

490. Найти проекцию точки (2, 3, 1) на прямую $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$.

491. Найти уравнения проекции прямой $2x-y+z-1=0$, $x+y-z+1=0$ на плоскость $x+2y-z=0$.

492. Найти отражение точки (-1, 2, 0) в плоскости $x+2y-z+1=0$.

493. Определить λ так, чтобы прямые $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ пересекались.

494. Найти прямые, перпендикулярные прямой $y-z+1=0$, $x+2z=0$ и лежащие в плоскости $x+y+z+1=0$.

495. Через точку пересечения плоскости $x+y+z=2$ и прямой $2y=x$, $z=-1$ провести прямую, лежащую в данной плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

496. Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки $(0, -1, 1)$ на прямую $y+1=0$, $x+2z-7=0$.

497. Дана прямая $x=2y=3z$ и точка $(0, 0, 1)$. Из этой точки опущен перпендикуляр на данную прямую, и сама данная прямая и перпендикуляр, опущенный на нее, спроектированы на плоскость xOz. Найти угол между проекциями.

498. Найти точку, симметричную точке (x_0, y_0, z_0) относительно прямой $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

499. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через перпендикуляр, опущенный из точки $(1, -1, 0)$ на прямую $x=z+3$, $y=-2z-3$.

500. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x+4z+1=0, \\ x-4y+9=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=0, \\ x+2z+4=0. \end{cases}$$

501. Прямые $x=y=z$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ и общий перпендикуляр к ним спроектированы на плоскость xOy. Определить углы между проекциями.

502. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

503. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} 2x+3y-z-1=0, \\ x+y-3z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+5y+4z-3=0, \\ x+2y+2z-1=0. \end{cases}$$

504. Найти плоскость, в которой лежат прямые $x=2t-1$, $y=3t+2$, $z=2t-3$ и $x=2t+3$, $y=3t-1$, $z=2t+1$.

505. Доказать, что расстояние точки $M(x, y, z)$ до прямой, проходящей через точку $A(a, b, c)$, можно выразить формулой $d=\frac{|\mathbf{r}\times\mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|}$, где $\mathbf{r}=\overline{AM}$, а $\mathbf{P}$ — любой вектор, направленный по прямой.

506. Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что расстояние d точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ можно выразить формулой

$$d^2=\frac{[m(x_1-a)-l(y_1-b)]^2+[n(x_1-a)-l(z_1-c)]^2+[n(y_1-b)-m(z_1-c)]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

507. Найти расстояние от точки (3, —1, 2) до прямой

$$2x-y+z-4=0,\ x+y-z+1=0.$$

508. Доказать, что расстояние между двумя непараллельными прямыми можно выразить формулой

$$d=\frac{(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|},$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — какие-нибудь векторы, расположенные на данных прямых, а $\mathbf{r}_3$ — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой.

509. Доказать, что длину d общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$$

можно представить формулой

$$d=\left|\frac{\begin{vmatrix} a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(lm_1-l_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2+(ln_1-l_1n)^2}}\right|.$$

510. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0. \end{cases}$$

511. Найти расстояние между прямыми

$$x=y=z \quad \text{и} \quad x-1=0,\quad y-2=0.$$

512. Доказать, что расстояние h между параллельными прямыми можно выразить формулой

$$h=\frac{|\mathbf{r}\times\mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|},$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой, а $\mathbf{P}$ — вектор, параллельный данным прямым.

513. Доказать, что расстояние между прямыми

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l}=\frac{y-b_1}{m}=\frac{z-c_1}{n}$$

можно выразить формулой:

$$h^2=\frac{[m(a_1-a)-l(b_1-b)]^2+[n(b_1-b)-m(c_1-c)]^2+[l(c_1-c)-n(a_1-a)]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

514. Найти расстояние между параллельными прямыми
$x=t+1,\ y=2t-1,\ z=t$ и $x=t+2,\ y=2t-1,\ z=t+1$.

515. Если векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ имеют равную длину и лежат на данных пересекающихся прямых, то векторы $\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2$ параллельны биссектрисам углов между прямыми. Исходя из этого замечания, доказать, что биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a}{l_1}=\frac{y-b}{m_1}=\frac{z-c}{n_1}$$

можно представить уравнениями

$$x=a+\left(\frac{l}{\Delta}\pm\frac{l_1}{\Delta_1}\right)t, \quad y=b+\left(\frac{m}{\Delta}\pm\frac{m_1}{\Delta_1}\right)t, \quad z=c+\left(\frac{n}{\Delta}\pm\frac{n_1}{\Delta_1}\right)t,$$

где

$$\Delta=\sqrt{l^2+m^2+n^2}, \quad \Delta_1=\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}.$$

516. Найти биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{6} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{14}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-1}{2}.$$

517. Найти биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-3}{3}.$$

518. Провести биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{11}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}$$

и найти углы, на которые проекции биссектрис на плоскость xOz делят проекции углов на ту же плоскость.

519. Найти прямые, пересекающие прямые

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

и параллельные плоскости $x+y+z=0$.

520. Найти прямые, пересекающие три прямые:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=0, \\ z+1=0. \end{cases}$$

521. Доказать, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных граней, пересекаются по прямой.

522. Три взаимно перпендикулярные прямые неподвижно связаны с твердым телом. Сначала они были направлены по осям Ox, Oy, Oz, а затем расположились по осям Ox_1, Oy_1, Oz_1. Косинусы углов между осями даются таблицей:

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

Доказать, что такое перемещение тела могло быть достигнуто вращением около прямой, и найти эту прямую.

523. Координаты x, y, z переходят в координаты x_1, y_1, z_1 по формулам:

$$\begin{aligned} 9x_1 &= 4x + 7y - 4z, \\ 9y_1 &= x + 4y + 8z, \\ 9z_1 &= 8x - 4y + z. \end{aligned}$$

Затем по таким же формулам координаты x_1, y_1, z_1 переходят в координаты x_2, y_2, z_2 и т. д. Доказать, что $x_4 = x$, $y_4 = y$, $z_4 = z$.

524. Координаты x, y, z переходят в координаты x_1, y_1, z_1 по формулам:

$$\begin{aligned} 9x_1 &= (5\cos\varphi + 4)x + (-4\cos\varphi + 3\sin\varphi + 4)y + \\ &\qquad + (-2\cos\varphi + 6\sin\varphi + 2)z, \\ 9y_1 &= (-4\cos\varphi - 3\sin\varphi + 4)x + (5\cos\varphi + 4)y + \\ &\qquad + (-2\cos\varphi + 6\sin\varphi + 2)z, \\ 9z_1 &= (-2\cos\varphi + 6\sin\varphi + 2)x + (-2\cos\varphi - 6\sin\varphi + 2)y + \\ &\qquad + (8\cos\varphi + 1)z. \end{aligned}$$

Затем по таким же формулам координаты x_1, y_1, z_1 переходят в координаты x_2, y_2', z_2 и т. д.

Доказать, что координаты x_n, y_n, z_n выражаются через x, y, z такими же формулами, как и x_1, y_1, z_1, только угол φ заменяется на $n\varphi$.

§ 4. Образование поверхностей

525. Найти геометрическое место точек, удаленных от прямой $x = y = z$ на расстояние, равное $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

526. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от осей Ox и Oy.

527. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от оси Ox и от прямой $y=2$, $z=2$.

528. Найти уравнение геометрического места прямых, образующих с плоскостью xOy угол 45° и проходящих через точку (1, 0, 0).

529. Прямая скользит по прямым $x=0$, $y=0$ и $x=1$, $z=0$, оставаясь параллельной плоскости $x+y+z=0$. Найти поверхность, образованную движением этой прямой.

530. Найти уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым $x=3-z$, $y=2-2z$ и $x=-z$, $y=3z-3$, оставаясь параллельной плоскости $2x-3y+z+12=0$.

531. Прямая скользит по трем прямым:

$$\begin{cases} x=0, \\ z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0, \\ z=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Найти уравнение образующейся поверхности.

532. Найти поверхность, получающуюся при скольжении прямой по трем данным прямым:

$$x=-2z-2, \quad y=-z; \qquad x=-z+1, \quad y=2; \qquad x=y=z.$$

533. Найти геометрическое место прямых, проходящих через ось Ox и параллельных прямой $x=1$, $y=z$.

534. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $2x=-2y=z$, а направляющая задана уравнениями $x+y-z=0$, $4y^2-2z^2+x-8y-8z-2=0$.

535. Найти геометрическое место перпендикуляров, опущенных из точки (0, 0, 1) на образующие конической поверхности $x^2+y^2=z^2$.

536. Найти уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x=y=z$, а направляющая — окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$.

537. Прямая, параллельная плоскости xOy, скользит по оси Oz и по кривой $x=r\cos\alpha z$, $y=r\sin\alpha z$. Найти уравнение получающейся поверхности.

538. Прямая, параллельная плоскости $x+y+z=0$, скользит по оси Oz и по окружности $x=b$, $y^2+z^2=a^2$. Найти получающуюся поверхность.

539. Найти поверхность, образуемую движением прямой, пересекающей окружность $z=0$, $x^2+y^2=1$ и прямые $x-1=y=z$; $y=0$, $x+1=0$.

540. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой в начале координат, а направляющая задана уравнениями $z=1$, $x^2+y^2=x$.

541. Доказать, что уравнение конической поверхности вращения, у которой оси Ox, Oy, Oz — образующие, имеет вид:

$$xy+xz+yz=0.$$

542. Найти коническую поверхность, вершина которой в точке $(1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями $y^2+x^2=1$, $x+y+z=0$.

543. Круглый диск параллелен плоскости yOz. Его центр — в точке $(1, 0, 2)$, а радиус равен единице. На оси Oz расположена светящаяся точка так, что тень от диска на плоскости xOy имеет вид параболы. Найти уравнение этой параболы.

544. Лампочка висит под центром круглого абажура, на 10 *см* ниже его и в 50 *см* от стены. Радиус абажура 15 *см*. Найти очертание тени на стене.

545. Диск с центром в $(1, 0, 2)$ и радиусом единица освещен источником света, расположенным на оси Oz так, что тень от диска на плоскости xOy имеет вид равнобочной гиперболы. Найти точку, в которой расположен источник света, если диск параллелен yOz.

546. Тот же вопрос, если тень имеет вид гиперболы с углом между асимптотами, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$.

547. Тот же вопрос для случая тени, имеющей вид эллипса, ось которого, расположенная на оси Ox, равна $\frac{8}{3}$.

548. Куб с центром в начале коо̀рдинат вращается около диагонали длиной $2a$, расположенной по оси Oz. Найти уравнение поверхностей, получаемых при вращении ребер куба.

549. Ось вращения круглого цилиндра проходит через точку (a, b, c) и параллельна вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$. Доказать, что уравнение цилиндра имеет вид:

$$[m(x-a)-l(y-b)]^2+[n(x-a)-l(z-c)]^2+$$
$$+[n(y-b)-m(z-c)]^2=r^2(l^2+m^2+n^2).$$

550. Доказать, что три линии: парабола $x^2+4y^2+4xy-6x-2y+3=0$, $z=0$, гипербола $x=0$, $4y^2+4z^2-10yz-2y+2z+3=0$ и эллипс $y=0$, $x^2+4z^2-6x+2z+3=0$ получаются при пересечении координатными плоскостями одной и той же конической поверхности с вершиной в точке $(1, 1, 1)$.

551. Два шара радиуса a касаются друг друга и плоскости xOy. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся данных шаров и плоскости xOy, если центры данных шаров — в точках $(\pm a, 0, a)$.

552. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух прямых: $x=a+lt$, $y=b+mt$, $z=c+nt$ и $x=a_1+l_1t$, $y=b_1+m_1t$, $z=c_1+n_1t$.

553. Найти уравнение цилиндрической поверхности вращения, имеющей образующими прямые $x=y=z$; $y=x+1$, $z=x+2$; $y=x-2$, $z=x+1$.

554. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся прямых $y=0$, $z=a$ и $x=0$, $z=-a$.

§ 5. Поверхности второго порядка. Центр и диаметральные плоскости

555. Найти общее уравнение поверхностей 2-го порядка, пересекаемых плоскостью xOy по кривой $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$.

556. Найти поверхность 2-го порядка, на которой лежат окружности

$$z=0, \quad x^2+y^2-1=0; \quad z=1, \quad x^2+y^2-3=0;$$
$$z=2, \quad x^2+y^2-5=0.$$

557. Через начало координат провести прямые асимптотического направления для поверхности $x^2-2y^2-4xy-10xz-4yz-10=0$, параллельные плоскости $3x+y-4z-3=0$.

558. Показать, что уравнению $x^2+y^2+z^2+2xz+2y+1=0$ удовлетворяют только точки прямой $x+z=0$, $y+1=0$.

559. Показать, что уравнению $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2xz-2yz+2x-2y-2z+3=0$ удовлетворяют координаты лишь одной точки $(-1, 1, 1)$.

560. Написать уравнение 2-го порядка, которому удовлетворяют координаты точки $(2, 1, 1)$.

561. Составить уравнение 2-го порядка, которому удовлетворяют только координаты точек прямой $2x+2=3y=2z$.

562. Найти уравнение совокупности плоскостей $x+2y-z+1=0$ и $x-y+z+1=0$.

563. Найти прямые, по которым поверхность конуса $z^2-2xy-4x-2y+2z-3=0$ пересекается с плоскостью $x+y+2z+5=0$.

564. Найти образующие поверхности $x^2+y^2-z^2=1$, проходящие через точку $(1, 1, 1)$.

565. Найти образующую поверхности $x^2-y^2=2z$, параллельную плоскости $x+y+z=0$.

566. Найти прямые, параллельные образующим двух поверхностей:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x.$$

567. Через точки $(0, -2, 2)$ и $(-1, 0, 0)$ провести плоскости, пересекающие конус $x^2+y^2=z^2$ по параболам.

568. Через те же точки провести плоскости, пересекающие тот же конус по эллипсам.

569. Преобразовать уравнение

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+6xz+2x-6y-2z=0,$$

перенеся начало координат в центр.

570. То же для поверхности

$$2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0.$$

571. То же для поверхности $4xy+4xz-4y-4z-1=0$.

572. Найти геометрическое место центров поверхностей $x^2+y^2-z^2+\lambda xz+\mu yz-2x-2y-2z=0$.

573. Из центра поверхности $x^2+4y^2-40z^2+4x-8y-16z-12=0$ провести прямые асимптотического направления.

574. Найти уравнение гиперболоида, проходящего через точку $(2, 1, 1)$, зная асимптотический конус этого гиперболоида $x^2+y^2-z^2=0$.

575. Доказать, что геометрическое место центров поверхностей 2-го порядка, проходящих через данный эллипс и через две точки, симметричные относительно плоскости этого эллипса, есть поверхность 2-го порядка.

576. Обозначая через $s_{\lambda\mu\nu}$ левую часть уравнения плоскости, проходящей через точки λ, μ и ν, доказать, что уравнение

$$s_{123}s_{456}+As_{234}s_{561}+Bs_{345}s_{612}+Cs_{124}s_{356}=0$$

при любом выборе коэффициентов A, B и C изображает поверхность 2-го порядка, проходящую через шесть данных точек, обозначенных номерами 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Общее уравнение поверхностей 2-го порядка имеет вид:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0.$$

Для более удобного обзора и запоминания ряда пунктов теории поверхностей 2-го порядка следует применять обозначения и сведения из теории квадратичных форм. Полином в левой части уравнения введением переменного t можно превратить в квадратичную форму четырех переменных $\Phi(x, y, z, t)$ или попросту Φ, где

$$\Phi=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gxt+Hyt+Izt+Kt^2.$$

При $t=1$ эта форма обращается в левую часть уравнения поверхности, которое можно записать в таком виде: $\Phi(x, y, z, 1)=0$. При $t=0$ форма Φ обращается в функцию трех переменных — тройничную квадратичную форму, которую обозначим через $f(x, y, z)$ или, еще короче, через f. Таким образом,

$$f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz.$$

Обозначая для симметрии x, y, z и t через x_1, x_2, x_3, x_4 и вводя другие обозначения для коэффициентов форм, можем написать еще:

$$\begin{aligned}\Phi=\sum_{i,j=1}^{4}a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2&+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{14}x_1x_4+\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{24}x_2x_4+\\&+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2+a_{34}x_3x_4+\\&+a_{41}x_4x_1+a_{42}x_4x_2+a_{43}x_4x_3+a_{44}x_4^2.\end{aligned}$$

Таким же образом имеем:

$$f=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+$$
$$+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2.$$

При этом положено:

$$A=a_{11},\quad B=a_{22},\dots,\quad D=2a_{12}=2a_{21},\quad E=2a_{13}=2a_{31},\dots$$

Частные производные функции Φ выражаются формулами:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4.$$

При $a_{14}=a_{24}=a_{34}=a_{44}=0$ правые части обращаются в величины

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Определитель

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

называется дискриминантом формы Φ.

Имеет значение тождество, которое можно назвать формулой Тэйлора:

$$\Phi(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta,\ t+\tau)=\Phi(x,y,z,t)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\eta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\zeta+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tau+\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau).$$

Здесь

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\eta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\zeta+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tau=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}x+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}y+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}z+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}t.$$

При этом, например,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial x};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=\frac{\partial\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{\partial\xi}.$$

Из формулы Тэйлора следует тождество Эйлера:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z+\frac{\partial\Phi}{\partial t}t=2\Phi(x,y,z,t).$$

577. Пользуясь формулой Тэйлора, доказать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η, ζ) уравнение поверхности $\Phi(x, y, z, 1)=0$ переходит в такое:

$$f(x, y, z)+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}x+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}y+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}z+\Phi(\xi, \eta, \zeta, 1)=0.$$

578. Если определитель $\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то можно найти такие величины для ξ, η и ζ, при которых $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=0$. Доказать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η, ζ) уравнение поверхности $\Phi(x, y, z, 1)=0$ переходит в такое:

$$f(x, y, z)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_1=0.$$

Здесь $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_1$ — частная производная, взятая при $t=1$. Указанный перенос есть преобразование к центру.

579. Если (x, y, z) — середина хорды поверхности $\Phi(x, y, z, 1)=0$, а $(x+l\sigma,\ y+m\sigma,\ z+n\sigma)$ и $(x-l\sigma,\ y-m\sigma,\ z-n\sigma)$ — ее концы, то справедливо равенство:

$$l\frac{\partial\Phi}{\partial x}+m\frac{\partial\Phi}{\partial y}+n\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

Доказать.

580. Доказать, что середины хорд поверхности $\Phi(x, y, z, 1)=0$, параллельных вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, лежат на плоскости

$$l\frac{\partial\Phi}{\partial x}+m\frac{\partial\Phi}{\partial y}+n\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

(Диаметральная плоскость, сопряженная с направлением вектора $\mathbf{P}$.)

581. Доказать, что для поверхности $f(x, y, z)\mp k=0$ уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$, можно написать в каждом из двух видов:

$$l\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}+n\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

и

$$\frac{\partial f(l, m, n)}{\partial l}x+\frac{\partial f(l, m, n)}{\partial m}y+\frac{\partial f(l, m, n)}{\partial n}z=0.$$

582. Доказать, что для поверхности $\Phi(x, y, z, 1)=0$ уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$, можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial f}{\partial l}x+\frac{\partial f}{\partial m}y+\frac{\partial f}{\partial n}z+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_0=0.$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial l}$, $\frac{\partial f}{\partial m}$ и $\frac{\partial f}{\partial n}$ — частные производные от $f(l, m, n)$, а $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0$ — значение величины $\frac{\partial \Phi(l, m, n, t)}{\partial t}$ при $t = 0$.

583. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, сопряженную с направлением вектора $\mathbf{P}(1, -1, 0)$.

584. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, параллельную плоскости $x + y + z = 0$.

585. У той же поверхности найти диаметральную плоскость, проходящую через точки $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 0)$.

586. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$, проходящую через точку $(2, 1, 0)$, а также направление, с ней сопряженное.

587. Найти диаметральную плоскость поверхности $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0$, проходящую через начало координат.

588. Найти уравнения диаметра поверхности $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y - 4z + 3 = 0$, перпендикулярного к плоскости xOz.

589. Плоскость $x = 0$ есть диаметральная плоскость поверхности $xy = z$. Найти хорды, с которыми она сопряжена.

590. Найти диаметральную плоскость, общую поверхностям $x^2 + y + z = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

591. Найти уравнение диаметра поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, соответствующего плоскости $x + y + z - 6 = 0$.

592. Найти геометрическое место центров сечений поверхности $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2z - 1 = 0$ плоскостями, параллельными плоскости $x - y + z = 0$.

593. Зная диаметр $y = z$, $x - 1 = 0$ поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$, найти уравнения плоскостей, ему соответствующих.

§ 6. Касательные плоскости и прямые к поверхностям второго порядка

Уравнение касательной плоскости к поверхности 2-го порядка $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ в точке (x_1, y_1, z_1) может быть написано в каждой из двух форм:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

В первом из них производные взяты от $\Phi(x, y, z, t)$ и в них положено $t = 1$, во втором — от $\Phi(x_1, y_1, z_1, t)$ и в них положено $t = 1$.

Если в тех же уравнениях x_1, y_1, z_1 — координаты некоторой точки, не обязательно лежащей на поверхности, то они изображают некоторую плоскость, называемую полярной плоскостью для точки (x_1, y_1, z_1).

Касательная прямая получается при пересечении касательной плоскости с любой плоскостью, проходящей через точку касания.

Если $M(x, y, z)$ — точка поверхности, то вектор $\mathbf{N}$, проекции которого на оси координат равны величинам $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ при $t = 1$, направлен по нормали к поверхности в точке M.

594. Доказать, что плоскость, касательная к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_1, y_1, z_1), может быть представлена уравнением

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

595. Доказать, что плоскость, касающаяся гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \sigma$ в точке (x_1, y_1, z_1), имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = \sigma.$$

596. Доказать, что плоскость, касающаяся в точке (x_1, y_1, z_1) параболоида $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$, имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = z + z_1.$$

597. Найти уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и отсекающей на осях отрезки, отношение которых $a : b : c$.

598. Такой же вопрос для гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

599. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ найти точку так, чтобы касательная плоскость в ней отсекала на осях координат отрезки равной длины.

600. На касательной плоскости к эллипсоиду предыдущей задачи плоскостями координат образован треугольник с центром тяжести в точке касания. Найти координаты точки касания.

601. Доказать, что при $a^2 + b^2 + c^2 = l^2$ эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вписан в октаэдр $|x| + |y| + |z| = l$.

602. Доказать, что все нормали к поверхности $xy + xz + yz = 0$ образуют одинаковый угол с прямой $x = y = z$.

603. Доказать то же для поверхности $x^2+y^2+z^2=xy+xz+$ $+yz+1$.

604. На поверхности $xy+xz+yz=3$ найти точку, ближайшую к плоскости $x+y+z=0$.

605. На поверхности $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=6$ найти наиболее высокую и наиболее низкую точки.

606. На гиперболическом параболоиде $xy=z$ найти точки, нормаль в которых составляет с Oz угол $45°$.

607. На параболоиде $x^2-y^2=az$ проводится линия, во всех точках которой нормаль к поверхности составляет с Oz постоянный угол. Доказать, что проекция этой линии на xOy есть окружность с центром в начале координат.

608. Доказать, что плоскость, касающаяся поверхности x^2+y^2+ $+z^2=xy+xz+yz$ в точке $M(x_1, y_1, z_1)$, содержит прямую, проведенную из начала координат в точку M.

609. Плоскость, касательная к гиперболоиду $x^2+y^2-z^2=1$ в точке $(1, 0, 0)$, пересекается с ним по двум прямым. Определить угол между ними.

610. Тот же вопрос для параболоида $x^2-y^2=z$ и точки $(0, 0, 0)$.

611. Через прямую $z=c\sqrt{3}$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ провести плоскость, касательную к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

612. Конусы касаются эллипсоида предыдущей задачи по плоским линиям, плоскости которых параллельны плоскости $x+y+z=0$. Доказать, что геометрическое место вершин конусов есть прямая $x=a^2t$, $y=b^2t$, $z=c^2t$.

613. Доказать, что условием касания плоскости $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ и поверхности $Ax^2+By^2-2Cz=0$ является равенство $\frac{\alpha^2}{A}+$ $+\frac{\beta^2}{B}+\frac{2\gamma}{C}=0$.

614. Доказать, что плоскость, параллельная плоскости $z=\alpha x+\beta y$ и касающаяся эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, имеет уравнение $z=\alpha x+\beta y\pm\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2}$.

615. Доказать, что условие касания прямой $x=a+lt$, $y=b+mt$, $z=c+nt$ и поверхности $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$ выражается равенством

$$(Aal+Bbm+Ccn)^2=(Al^2+Bm^2+Cn^2)(Aa^2+Bb^2+Cc^2+D).$$

Если при этом выполняются равенства

$$Aal+Bbm+Ccn=0,\quad Al^2+Bm^2+Cn^2=0,$$
$$Aa^2+Bb^2+Cc^2+D=0,$$

то прямая лежит на поверхности.

616. Прямая, параллельная вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается в точке (x_1, y_1, z_1) поверхности $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$. Доказать, что $Alx_1+Bmy_1+Cnz_1=0$.

617. Плоскость, перпендикулярная к вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается поверхности $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$. Показать, что ее уравнение имеет вид:

$$lx+my+nz=\pm\sqrt{-D\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}\right)}.$$

618. Плоскость, перпендикулярная к вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается поверхности $Ax^2+By^2+z=0$. Показать, что ее уравнение имеет вид:

$$lx+my+nz=\frac{l^2}{4An}+\frac{m^2}{4Bn}.$$

619. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся гранями поверхности Ax^2+By^2+ $+Cz^2+D=0$, есть поверхность шара

$$x^2+y^2+z^2=-D\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right),$$

предполагая, что правая часть положительна.

620. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся гранями поверхности $Ax^2+By^2+z=0$, есть плоскость $z=\frac{1}{4A}+\frac{1}{4B}$.

621. Эллипсоид с полуосями a, b и c скользит, касаясь трех координатных плоскостей. Доказать, что расстояние его центра от начала координат равно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

622. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся ребрами поверхности Ax^2+By^2+ $+Cz^2+D=0$, есть поверхность

$$A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=(A+B+C)(Ax^2+By^2+Cz^2+D).$$

623. Прямоугольный трехгранный угол скользит, касаясь ребрами поверхности $Ax^2+By^2+2z=0$. Доказать, что его вершина движется по поверхности

$$x^2+y^2+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)z=\frac{1}{AB}.$$

624. Найти минимальные размеры ящика со стенками, параллельными плоскостям координат, в который может быть вложен эллипсоид

$$(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2=a^2.$$

625. Шар $x^2+y^2+z^2=2z$ освещен пучком лучей, параллельных прямой $x=y=z$. Найти форму тени на плоскости xOy.

626. Найти тень от эллипсоида $(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2=a^2$ на плоскости $x+y+z=0$, если лучи перпендикулярны к этой плоскости.

627. Параболоид $xy=z$ проектируется на плоскость xOy лучами, параллельными прямой $x=y=z$. Найти форму тени.

628. Точки касания плоскостей с поверхностью 2-го порядка расположены на линии пересечения ее с плоскостью, проходящей через центр. Доказать, что касательные плоскости параллельны одной и той же прямой.

629. Около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a\geqslant b\geqslant c$, $a>c$, можно описать цилиндр с круговым поперечным сечением. Найти уравнение цилиндра.

630. Доказать, что при движении точек по некоторой плоскости полярная плоскость точки относительно данной поверхности 2-го порядка вращается около соответствующей точки.

631. Доказать, что при движении точки по прямой ее полярная плоскость вращается вокруг соответствующей прямой.

632. Найти геометрическое место точек касания касательных прямых, проведенных из данной точки к данной поверхности 2-го порядка.

633. Найти геометрическое место точек касания касательных к данной поверхности 2-го порядка, параллельных вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$.

634. Круг радиуса a скользит, касаясь трех координатных плоскостей. Найти поверхность, по которой движется его центр.

635. Прямоугольный трехгранный угол касается гранями данной окружности радиуса a. Доказать, что его вершина описывает поверхность шара радиуса $a\sqrt{2}$.

§ 7. Упрощение уравнений поверхностей второго порядка

Уравнение поверхности 2-го порядка можно написать в таком виде:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Iz+K=0,$$

или, сокращенно,

$$F(x, y, z)=0.$$

Здесь члены второй степени относительно координат образуют тройничную квадратичную форму $f(x, y, z)$ или попросту f. Таким образом

$$f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz.$$

Упрощение уравнений 2-го порядка можно выполнять, исходя из свойств диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$, т. е. делящей пополам хорды, параллельные этому вектору. Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}l+\frac{\partial F}{\partial y}m+\frac{\partial F}{\partial z}n\right]=0,$$

или, в полной форме:

$$(Ax+Dy+Ez+G)l+(Dx+By+Fz+H)m+(Ex+Fy+Cz+I)n=0.$$

То же уравнение можно записать еще и так:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial l}x+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial m}y+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial n}z+Gl+Hm+In=0;\quad f=f(l,\ m,\ n),$$

или, в полном виде:

$$(Al+Dm+En)\,x+(Dl+Bm+Fn)\,y+$$
$$+(El+Fm+Cn)\,z+Gl+Hm+In=0.$$

Направления вектора и сопряженной диаметральной плоскости можно назвать главными, если плоскость перпендикулярна к вектору. Главная диаметральная плоскость есть плоскость симметрии поверхности. Для вектора главного направления выполняются условия:

$$Al+Dm+En=\lambda l,\ Dl+Bm+Fn=\lambda m,\ El+Fm+Cn=\lambda n. \qquad (*)$$

Поэтому λ удовлетворяет характеристическому уравнению квадратичной формы f, имеющему вид:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & D & E \\ D & B-\lambda & F \\ E & F & C-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (**)$$

Найдя какой-нибудь корень этого уравнения, из равенств (*) можно найти направление вектора $\mathbf{P}(l,\ m,\ n)$. Уравнение (**) всегда имеет вещественные корни, если коэффициенты $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ вещественны. Если λ_1 и λ_2 — два различных его корня, то соответствующие им главные направления векторов $\mathbf{P}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$ и $\mathbf{P}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ взаимно перпендикулярны. Если корни характеристического уравнения (**) различны, то получаются три взаимно перпендикулярных вектора главного направления: $\mathbf{P}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$, $\mathbf{P}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ и $\mathbf{P}_3(l_3,\ m_3,\ n_3)$. Если оси координат направить по этим направлениям, то уравнение поверхности приобретает вид:

$$A_1x_1^2+B_1y_1^2+C_1z_1^2+2G_1x_1+2H_1y_1+I_1z_1+K_1=0. \qquad (***)$$

При этом, если уравнение было раньше преобразовано переносом начала координат в центр, то уравнение получает еще более простой вид:

$$A_1x_1^2+B_1y_1^2+C_1z_1^2+K_1=0.$$

Если центра у кривой нет, то в уравнении (***) один или два из коэффициентов A_1, B_1 и C_1 обращаются в нуль, а соответствующий из коэффициентов G_1, H_1, K_1 не равен нулю.

I. $C_1=0$, $A_1\neq 0$, $B_1\neq 0$, $I_1\neq 0$. В этом случае можно перенести начало координат в такую точку, что уравнение принимает вид

$$A_1x_2^2+B_1y_2^2+I_2z_2=0.$$

II. $B_1=0, C_1=0, H_1\neq 0, I_1\neq 0$. Здесь можно, сохраняя прежнее направление оси O_1x_1, заменить y_1 и z_1 так, чтобы уравнение получило вид:

$$A_1x_2^2+H_2y_2=0.$$

Характеристическое уравнение может иметь равные корни. При этом, если все три корня равны, то менять направления осей излишне — независимо от их выбора, уравнение, после переноса начала в центр, получает вид:

$$A\,(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+K_1=0.$$

Если равны два корня: $\lambda_2 = \lambda_3$, а $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то значение λ_1 дает возможность найти одно главное направление и вектор $\mathbf{P}_1(l, m_1, n_1)$ этого направления. Два других в этом случае не вполне определены. Их можно выбрать следующим способом:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_1$$

Здесь $\mathbf{r}$ — любой вектор, не параллельный $\mathbf{P}_1$.

Заметим, что характеристическое уравнение в раскрытом виде можно написать так:

$$\lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0,$$

где коэффициенты p, q и r выражаются равенствами:

$$p = A + B + C,$$
$$q = AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2,$$
$$r = AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF.$$

Выражения p, q, r являются инвариантами уравнения поверхности 2-го порядка, т. е. их величина не изменяется при замене координат, включая и поворот осей и перенос начала.

636. Найти плоскость симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - x + 4y - z + 2 = 0.$$

637. Найти плоскости симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 9z - 1 = 0.$$

638. Найти плоскости симметрии поверхности

$$xy + xz + yz = 1.$$

639. В уравнении поверхности 2-го порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + $$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0$$

величины определителей

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix},$$

которые можно назвать дискриминантами квадратичных форм

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

и

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + $$
$$+ 2Gxt + 2Hyt + 2Izt + Kt^2,$$

являются инвариантами, как и величины

$$p = A + B + C, \quad q = AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2.$$

Пользуясь этим, доказать, что уравнения поверхности с центром, при $\Delta_3 \neq 0$, можно привести к виду:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

640. Доказать, что при $\lambda_3 = 0$, $q \neq 0$ уравнение поверхности можно привести к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 2\sqrt{-\frac{\Delta_4}{q}} \cdot z.$$

641. Доказать, что при $\Delta_4 = 0$ поверхность либо цлииндрическая, либо уравнение изображает точку, прямую или одну, либо пару плоскостей.

Упростить уравнения следующих поверхностей и дать формулы преобразования координат, которыми это упрощение достигается:

642. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 1 = 0.$

643. $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$

644. $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0.$

645. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12xy - 8xz - 4yz + 14x + 16y - 12z + 33 = 0.$

646. $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 12y - 6z = 0.$

647. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz - 10x + 4y + 6 = 0.$

648. $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2x + 6y + 2z + 8 = 0.$

649. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$

650. $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0.$

651. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0.$

652. $7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz = 0.$

653. $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = 0.$

654. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 49.$

655. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 0.$

656. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 21 = 0.$

657. Составить уравнение геометрического места вершин поверхностей $4y^2 - 2z^2 + x + ay + bz = 0$.

658. Определить λ и μ так, чтобы уравнение $x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 = 1$ изображало цилиндр вращения.

659. Найти условие для a, b и c, при котором уравнение $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$ представляет поверхность вращения.

660. Найти ось вращения поверхности

$$y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2) + 2\lambda xz - 2x = 0.$$

661. Найти c, при котором конус $x^2 - 2xy + cz^2 = 0$ есть конус вращения, и дать уравнения оси.

662. Доказать, что конус с вершиной в точке $(1, \frac{1}{2}, 0)$ и с направляющей $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$, $z = 1$ есть конус вращения.

663. Исследовать характер поверхности

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2xy-2xz-2yz=2m^2-3m+1$$

при изменении m от $-\infty$ до $+\infty$.

664. При каком соотношении между α и β уравнение

$$x^2+y^2-z^2+2\alpha xz+2\beta yz-2x-4y+2z=0$$

представляет коническую поверхность?

665. Найти уравнение геометрического места точек вне куба со стороной a, произведение расстояний которых до трех сходящихся граней куба равно произведению расстояний до трех других граней куба.

666. Определить вид поверхности, получающейся при движении прямой, параллельной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и скользящей по прямым $x=0$, $z=a$; $y=0$, $z=-a$.

667. Векторы $\mathbf{P}(a, b, c)$, $\mathbf{P}_1(a_1, b_1, c_1)$ и $\mathbf{P}_2(a_2, b_2, c_2)$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что поверхность

$$A(ax+by+cz+d)^2+B(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+$$
$$+C(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2+D=0$$

имеет главными направлениями векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$.

668. Поверхность 2-го порядка проходит через точки (0, 0, 0), (1, 1, —1), (0, 0, 1) и имеет плоскости симметрии

$$x+y+z=0, \quad 2x-y-z=0, \quad y-z+1=0.$$

Найти ее уравнение.

669. Цилиндр 2-го порядка проходит через точки (1, 0, —1), (2, 0, 2). Его ось дана уравнениями $x=-y=z$, а плоскости симметрии — уравнениями $x+2y+z=0$ и $x=z$. Найти его уравнение.

670. $x=0$ и $y=0$ — плоскости симметрии поверхности 2-го порядка. Точки (0, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 2) и (2, 0, 3) — на поверхности. Найти ее уравнение.

671. Поверхность вращения 2-го порядка проходит через точки (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2). Ось вращения — ось Oz. Найти уравнение поверхности.

672. Образующие параболического цилиндра параллельны прямой $2x=2y=-z$, уравнение плоскости симметрии $x+y+z=0$, а точки (1, 1, 1), (1, —1, 1) — на поверхности. Найти уравнение цилиндра.

673. $s_1=0$, $s_2=0$, $s_3=0$ — уравнения трех диаметральных плоскостей поверхности. При этом каждая из них сопряжена с линией пересечения двух других плоскостей. Доказать, что уравнение поверхности можно написать в таком виде:

$$As_1^2+Bs_2^2+Cs_3^2+D=0.$$

674. Три хорды эллипсоида, проходящие через центр, такие, что каждая из них сопряжена с плоскостью, проходящей через две другие, можно назвать тремя взаимно сопряженными осями эллипсоида. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на трех взаимно сопряженных осях эллипсоида, есть величина постоянная.

675. Доказать, что уравнение

$$(ax+by+cz+d)^2 \pm (\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2 = px+qy+rz+s$$

изображает параболоид, у которого $px+qy+rz+s=0$ — касательная плоскость, а совместные уравнения

$$ax+by+cz+d=0, \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

дают диаметр, проходящий через точку касания.

676. Найти уравнение параболоида, касающегося плоскости $x+y+z=0$ в начале координат, имеющего диаметральную плоскость $x=y$ и проходящего через точки $(1, 1, 2)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 1, 1)$, $\left(\frac{9}{2}, 2, 2\right)$.

§ 8. Круговые сечения, прямолинейные образующие и другие задачи

677. Через прямую $2x=2y=z$ провести плоскость, пересекающую поверхность $4x^2-y^2+z=0$ по равнобочной гиперболе.

678. Найти вершину параболы, получающейся при сечении цилиндра $y^2=2x$ плоскостью $x+y+z=1$.

679. Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии эллипсов, получаемых при сечении эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2=1$ плоскостями, параллельными плоскости $2x+y+z=0$.

680. Найти уравнения оси параболы, получаемой в сечении поверхности $x^2+y^2-2z^2=1$ плоскостью $x+y-2z=1$.

681. Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии пересечения поверхности $x^2+2y^2-2z=0$ плоскостями, параллельными плоскости $x+y+z=0$.

682. Найти плоскость, в которой лежат оси симметрии парабол, получаемых при пересечении поверхности $y^2+2z^2=2x$ плоскостями, перпендикулярными к вектору $\mathbf{P}(0, 1, -1)$.

683. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через ось вращения поверхности

$$5x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+4yz+3x+2y+z=0.$$

684. Найти уравнения плоскостей, пересекающих эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ по кругам. При этом $a>b>c$.

685. Найти геометрическое место вершин конусов, касающихся по кругам эллипсоида предыдущей задачи.

686. Найти круговые сечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ при $a>b$.

687. Найти круговые сечения поверхности

$$2x^2+y^2+z^2+xy-xz-2x=0.$$

688. Найти геометрическое место центров круговых сечений эллипсоида

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y+4z+2=0.$$

689. Найти общий вид плоскостей, пересекающих по кругам поверхность

$$x^2+y^2-\lambda xz-\mu yz-\lambda az-a^2=0.$$

690. Найти круговые сечения поверхности

$$x^2+y^2+az^2+bxz+cyz+dx+ey+fz+g=0.$$

691. При каких λ и μ круговые сечения поверхности $x^2+y^2-\lambda xz-\mu yz-\lambda az-a^2=0$ перпендикулярны к вектору $\mathbf{P}(1, 1, 1)$?

692. Найти уравнение цилиндра, проходящего через круг $x^2+y^2=1$, $z=0$ и точку $(0, 1, 1)$ и имеющего взаимно перпендикулярные плоскости круговых сечений.

693. Каково .геометрическое место центров сфер радиуса R, пересекающих эллипсоид $x^2+2y^2+3z^2=1$ по кругам?

694. Найти геометрическое место вершин конусов вращения, проходящих через параболу $z=0$, $y^2=2px$.

695. Доказать, что геометрическое место вершин круговых конусов, проходящих через эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=0$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$; $y=0$.

Указание. Сфера, касающаяся кругового конуса и некоторой плоскости, имеет точку касания плоскости в фокусе получившегося сечения.

696. Поверхности 2-го порядка с центром в точке (a, b, c) проходят через круг $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. Найти геометрическое место центров круговых сечений, плоскости которых проходят через начало координат.

697. Найти уравнения прямых, по которым поверхность конуса вращения $xy+xz+yz=0$ пересекается с плоскостью, проходящей через ось и точку $(1, 2, 3)$.

698. На гиперболическом параболоиде $y^2-z^2=2x$ найти место точек, через которые проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

699. Тот же вопрос для поверхности $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$.

700. Найти прямолинейные образующие поверхности

$$xy + xz + x + y + 1 = 0.$$

701. Тот же вопрос для поверхности

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6 = 0.$$

702. Найти уравнения прямолинейных образующих поверхности $4y^2 - z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0$, пересекающих ось Ox.

703. Найти величину наибольшего угла между образующими конуса $x^2 + y^2 = (x + y + z)^2$, а также направление его оси.

704. Найти уравнение гиперболоида, у которого прямые $2x - 1 = 0$, $y = z$, $2x = z$, $y + 1 = 0$, $2x = -z$, $y = 1$ являются образующими одной системы.

705. Найти уравнение параболоида, у которого прямые

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ y - z - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - z + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

— образующие одной системы.

706. Найти общее уравнение параболоидов, проходящих через круг $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ и имеющих ось, параллельную вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$.

707. Найти уравнение конуса, на поверхности которого лежат круги $x = 0$, $y^2 + z^2 - 2az = 0$; $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2bx$.

708. Найти координаты вершины конуса, на поверхности которого лежат круг $x = 0$, $y^2 + z^2 = 2az$ и парабола $z = 0$, $y^2 = 2px$.

709. Найти параболоид, на котором лежат точки $(0, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$ и прямые $x = 0$, $z = 2$; $y = 0$, $z = -2$.

710. Найти параболический цилиндр, на котором лежат параболы $z = 0$, $y^2 = 2x$; $x = z$, $2y^2 = x + z$.

711. Найти параболоид вращения, проходящий через точку $(1, 1, 2)$ и круг $x = z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z$.

712. Каково геометрическое место центров сфер данного радиуса, пересекающих эллиптический параболоид по кругам?

713. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением эллипсоида $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 0$.

714. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением параболоида $2y^2 + z^2 - 2x = 0$ плоскостью $x = y$.

715. Найти параметр параболы, лежащей на поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0$ и в плоскости $x = z$.

716. Конус имеет вершину в фокусе вытянутого эллипсоида вращения и опирается на плоское сечение того же эллипсоида. Доказать, что этот конус есть конус вращения.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Теория пределов

Если числитель и знаменатель рациональной дроби при $x = a$ обращаются в нуль, то дробь можно сократить на $x - a$. Поэтому, например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3}.$$

Пользуясь этим приемом сокращения дробей, найти пределы в следующих примерах:

717. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

718. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

719. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$.

720. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

721. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$; n — целое.

722. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; m и n — целые.

723. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

724. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right)$; a и b — целые.

725. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\dots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\dots(x^k-1)}$.

Следующие задачи сводятся к предыдущему типу введением новой переменной: величину, стоящую под радикалом, обозначают через u^n, где показатель n выбирают так, чтобы корень извлекался:

726. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x^{\frac{r}{s}}-1}$.

727. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

728. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

729. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Если числитель и знаменатель содержат степени переменной, которая стремится к бесконечности, то во многих случаях предел выражения удобно находить, разделив числитель и знаменатель на соответствующую степень переменной. Так, например, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=3.$$

Следующие задачи решаются этим приемом либо прямо, либо после предварительного преобразования.

730. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$.

731. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$.

732. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$.

733. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$.

734. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

735. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.

736. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

737. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

738. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right]$.

Замечание. В последней задаче, а также и в следующих удобно пользоваться формулой для суммы квадратов натуральных чисел:

$$1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

легко доказываемой по методу полной индукции.

739. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

740. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right)$.

741. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$.

742. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

Одним из приемов нахождения пределов иррациональных выражений является перевод иррациональности из знаменателя в числитель или из числителя в знаменатель. Так, например, имеем:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x+1})}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to2}\frac{(2+x)-(3x-2)}{(4x+1)-(5x-1)}\times$$

$$\times\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to2}\frac{4-2x}{2-x}\cdot\frac{3+3}{2+2}=3.$$

Подобными приемами решаются следующие задачи:

743. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

744. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.

745. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.

746. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

747. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.

748. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$.

749. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

750. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

751. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

752. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

753. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$.

754. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

755. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

756. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

757. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

758. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

759. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right]$.

760. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$.

761. Определить λ и μ из условия $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$.

762. Определить λ и μ из условия

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{a_\nu x^2+b_\nu x+c_\nu}-\lambda x-\mu\right]=0;\quad a_\nu>0.$$

Иногда оказывается возможным путем удачного преобразования выражения свести вычисление его предела к нахождению пределов более простых выражений. Так, например, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+3x^4}-1\right)-\left(\sqrt{1-2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)-\left(\sqrt{1+x}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}-1}{x}-\dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}}=\frac{0-(-1)}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}}=-6.$$

Подобными приемами легко решаются следующие примеры:

763. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$ (n — целое, положительное).

764. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$.

765. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

766. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$.

Иногда при нахождении пределов формальные преобразования не достигают цели и нужно рассмотрение по существу. Так, например, при изучении выражений, содержащих a^n, при $n\to+\infty$, надо иметь в виду, что при $0<a<1$ величина $a^n\to 0$ при $n\to+\infty$, а при $a>1$ величина a^n безгранично растет. Пользуясь этим, легко решить следующие примеры, в которых $a>0$:

767. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$.

768. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

769. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$.

770. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$.

При изучении пределов тригонометрических выражений очень часто удобно пользоваться фундаментальной теоремой, по которой $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Так, например, при нахождении величины $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ полагаем $x=\pi+u$, где $u\to 0$. После этого без труда находим:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(3\pi+3u)}{\operatorname{tg}(5\pi+5u)}=\lim_{u\to 0}\frac{-\sin 3u}{\operatorname{tg} 5u}=-\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3u}{3u}}{\dfrac{\operatorname{tg} 5u}{5u}}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Подобными приемами, а иногда и применением способов, разобранных раньше, решаются следующие примеры:

771. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

772. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

773. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}$.

774. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

775. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, m и n — целые числа.

776. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$.

777. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

778. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

780. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

781. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

782. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

783. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$.

784. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$.

785. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

786. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

787. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

788. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

789. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$.

791. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$.

792. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

793. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

794. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

Следующий ряд задач содержит пределы выражений, у которых показатель степени бесконечно возрастает, т. е. выражений вида u^v, где $u\to 1$, а $v\to\infty$. Все они могут решаться введением новой переменной n по такой схеме:

$$u^v=\left(1+\frac{1}{n}\right)^v=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}v}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{(u-1)v}.$$

Отсюда следует:

$$\lim u^v=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lim(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v}.$$

Здесь предел выражения в показателе находится предыдущими приемами.

795. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

796. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

797. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

798. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

799. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

800. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

801. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$.

802. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{m}}\right)^m$.

803. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}+\lambda\sin\dfrac{x}{m}\right)^m$.

804. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

805. $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{b}{m}\right)}{\sin a}\right]^m$.

806. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} 2x}$.

807. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\dfrac{n+1}{n-1}\,\dfrac{\pi}{2}\right]^{\operatorname{tg}\frac{n-1}{n+1}\frac{\pi}{2}}$.

808. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{ctg} 2x}$.

Следующие примеры, похожие на предыдущие по виду, отличаются по существу, так как в них основание не стремится к единице. Они решаются прямым рассмотрением вопроса.

809. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{x^2}$.

810. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$

811. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{\operatorname{tg}\frac{n+1}{n+3}\frac{\pi}{2}}$; n — целое положительное.

Дальнейшие несколько задач содержат логарифмы и показательные функции. При их решении важны два основных предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \text{ где логарифм — натуральный;}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \text{ где логарифм — натуральный; } a>0.$$

812. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

813. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg_{10}x-1}{x-10}$.

814. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

815. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\cos\dfrac{\pi}{n}$.

816. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$.

817. $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)$.

818. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$.

819. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$.

820. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^{\alpha x}\right)}{\ln\left(1+e^{\beta x}\right)}$; $\alpha>0$, $\beta>0$.

821. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)n.$

822. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right);\ a>0.$

823. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right).$

824. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x};\ a>0,\ b>0.$

825. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}.$

826. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}.$

827. $\lim\limits_{x\to c}\frac{a^x-a^c}{x-c};\quad a>0.$

828. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}};\ a>0.$

829. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n;\ a>0,\ b>0.$

830. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n;\ a_1>0,\ a_2>0,\ldots,\ a_m>0.$

831. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}.$

832. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{2a+x}{a+x}.$

§ 2. Разные задачи

833. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda)>1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda,$$

где числа α, $\beta,\ldots,\lambda$ одного знака и больше, чем -1.

834. Пользуясь неравенством Бернулли, доказать, что при n целом $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$, если $n>1$.

835. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, если $n>1$.

836. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$.

837. Величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает, а величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает при возрастании целого числа n. Отсюда и из очевидного неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ вывести, что обе эти величины при $n\to\infty$ стремятся к общему пределу. Этот предел обозначается через e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

838. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}u_n,$$

предполагая, что предел в правой части существует.

839. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n}{v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n},$$

предполагая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ существует и что $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n\to\infty$ при $n\to\infty$, а числа $v_n>0$.

840. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}},$$

предполагая, что предел в правой части существует и $v_n\to\infty$ при $n\to\infty$, а $v_n>v_{n-1}$.

841. При m целом положительном доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}.$$

842. При том же условии доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m}{n^m}-\frac{n}{m+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

843. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^m+3^m+5^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^m}-\frac{2^m n}{m+1}\right]=0;\ m\text{ — целое}\geqslant 0.$$

844. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+3^m+5^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^{m+1}}=\frac{2^m}{m+1};\ m\text{ — целое}\geqslant 0.$$

845. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$, заметив сначала, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

846. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

847. Из неравенств $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Исходя отсюда, доказать равенство:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon(n).$$

Здесь C — постоянная, называемая постоянной Эйлера, а $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

848. Пользуясь предыдущим результатом, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

849. Исходя из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

850. Пользуясь формулой $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{3a}{n^2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\,a}{n^2}\right]=a.$$

851. Доказать, что при $n\to\infty$

$$\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdot\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\ldots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}\to e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

852. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\ldots+\cos\frac{(2n+1)\,\pi}{4n}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

853. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2},$$

изучив возможности сокращения дроби, стоящей в одной скобке, с соседними с ней дробями.

Доказать следующие равенства:

854. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\frac{1}{3}.$

855. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$

856. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$; $|x|<1$.

857. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$ (Эйлер).

858. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\ \text{(Виета)}.$$

859. Последовательность значений u_n дается формулами: $u_1=\sqrt{2}$, $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $u_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ и вообще $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$. Заменив последнюю двойку под радикалом на 4, убедиться, что u_n ограничено. Доказав, что $\lim u_n$ при $n\to\infty$ существует, найти его из равенства $u_n^2=2+u_{n-1}$.

Замечание. Еще легче находится этот предел из равенства $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

860. Последовательность v_n задана равенствами:

$$v_1=\sqrt{a},\quad v_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad v_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ldots;\quad a>0.$$

Заменив под последним корнем число a величиной $a+x$, где x — положительный корень уравнения $x^2=a+x$, убедиться, что v_n ограничено, и доказать, что $v_n\to x$ при $n\to\infty$.

861. Последовательность чисел задается равенствами

$$x_0=a,\quad x_1=b,\quad x_2=\frac{x_0+x_1}{2},\quad\ldots,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}.$$

Найти выражение x_n через a и b и найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

862. Даны числа a и b, где $a>b>0$. Затем составляются новые пары чисел по формулам: $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. При этом $a_0=a$ и $b_0=b$. Доказать, что $a_nb_n=ab$, что

$$\frac{a_n-\sqrt{a_nb_n}}{a_n+\sqrt{a_nb_n}}=\left(\frac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{2n}$$

и, наконец, что $\lim a_n=\lim b_n=\sqrt{ab}$.

863. По двум данным положительным числам a и b можно построить ряд новых чисел с помощью равенств: $a_0=a$, $b_0=b$,

$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1=\sqrt{a_0b_0}$ и, вообще, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. Доказать, что при $n\to\infty$ числа a_n и b_n стремятся к общему пределу. (Арифметико-геометрическое среднее Гаусса.)

864. Две последовательности чисел составляются по формулам:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}.$$

При этом $a_0=a$, $b_0=b$ — данные положительные числа. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, равный $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, полагая $a=b\cos\varphi$ при $a<b$ и $a=b\operatorname{ch}\varphi$ при $a>b$.

865. Последовательность чисел составляется по формулам: $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$, где $a>0$ — данное число, а x_0 — произвольное положительное число. Доказать, что $x_n\to\sqrt{a}$ при $n\to\infty$.

Замечание. На этом основан довольно удобный, особенно при пользовании арифмометром, способ извлечения корней.

866. Числа последовательности составляются по такому закону: x_0 — произвольное положительное число, а дальнейшие находятся по формуле

$$x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a},$$

где a — данное положительное число.

Доказать, что $x_n\to\sqrt{a}$ при $n\to\infty$.

Замечание. Закон составления чисел x_n здесь сложней, чем предыдущий, но зато числа x_n быстрее приближаются к $\sqrt{a}$, чем раньше, особенно если x_0 взять близким к $\sqrt{a}$.

867. Доказать, что последовательности, составляемые подобно прежним по формуле $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$ или по формуле $x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^3+2a\right)}{2x_n^3+a}$, стремятся к $\sqrt[3]{a}$.

868. Последовательность y_n определяется следующим способом: $y_1=\frac{x}{2}$, где $0<x<1$; $y_2=\frac{x}{2}+\frac{y_1^2}{2}$, и вообще $y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2}$. Доказать, что y_n — ограниченная монотонная величина и найти $\lim y_n$.

869. $y_1=\frac{x}{2}$, где $0<x<1$; $y_2=\frac{x}{2}-\frac{y_1^2}{2}; \ldots; y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует и равен $\sqrt{1+x}-1$.

§ 3. Понятие о функции. Непрерывность. Графическое представление функций

870. Из кусков, длина которых равна 1 *дм*, 2 *дм*, 1 *дм* и вес которых равен 2 *кг*, 3 *кг* и 1 *кг*, составлен один сплошной брус AC. Найти вес отрезка AB этого бруса в функции от длины его x, где x считается от точки A — начала куска весом в 2 *кг*.

871. В каких промежутках можно рассматривать функции y, z, u и v, определяемые равенствами:

$$u=\ln(x^2-1),\quad v=\ln(x+1)+\ln(x-1),$$
$$y=\sqrt{1-x^2},\quad z=\ln(x^2-3x+2)?$$

872. В каких промежутках можно рассматривать функции

$$y=\arccos\frac{3}{x},\qquad z=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}?$$

873. В каких промежутках можно рассматривать функции, определенные равенствами:

$$y=x\ln x\quad \text{при } x\neq 0 \quad \text{и}\quad y=0 \text{ при } x=0,$$
$$z=\frac{1}{2}x\ln x^2 \text{ при } x\neq 0 \quad \text{и}\quad z=0 \text{ при } x=0?$$

874. Функция задана равенствами:

$$f(x)=2x \text{ при } 0\leqslant x<1 \quad \text{и}\quad f(x)=3-x \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Будет ли $f(x)$ непрерывна во всем сегменте $0\leqslant x\leqslant 2$?

875. При каком a функция y, заданная равенствами

$$y=x\ln(x^2) \text{ при } x\neq 0 \quad \text{и}\quad y=a \text{ при } x=0,$$

непрерывна в промежутке $(-\infty,\ \infty)$?

876. Обозначая через $[a]$ целую часть a, определить, при каких значениях x имеет разрыв непрерывности функция y, определенная равенством

$$y=\sqrt{x}-[\sqrt{x}].$$

877. При каком значении x функция $e^{\frac{1}{x}}$ имеет разрыв непрерывности и каков этот разрыв?

878. Какой разрыв непрерывности и при каком x имеет функция

$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}?$$

879. При каких значениях x имеют разрыв непрерывности функции

$$u=\frac{x}{x^2-4},\quad v=\frac{x^2+3}{x^2-3},\quad w=\frac{1}{x-x^3}?$$

При каких значениях x имеют разрыв следующие функции:

880. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

881. $\frac{x}{\sin x}$.

882. $\ln\ln(1+x^2)$.

883. $\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^2(x-1)}$.

884. Имеет ли разрыв непрерывности функция, определенная равенствами $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x\neq 0$ и $y=0$ при $x=0$?

Построить по точкам графики целых функций 2-й степени (параболы):

885. $y=\frac{x^2}{4}$.

886. $y=-\frac{x^2}{2}$.

887. $y=\frac{x^2-3x}{4}$.

888. $y=\frac{4x-x^2}{3}$.

889. $y=ax^2$ при $a=4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$.

890. $y=ax^2+x-1$ при $a=1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{20}$, и прямую $x=y+1$.

891. Воспользовавшись тождеством

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\quad (a\neq 0),$$

построить график функции $y=ax^2+bx+c$.

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй (параболы высших порядков):

892. $y=\frac{x^3}{10}$.

893. $y=\frac{x^3-9x}{10}$.

894. $y=\frac{x^4}{10}$.

895. $y=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$.

896. $y=\frac{x^4+15x}{30}$.

897. $y=\frac{4x-5x^3+x^5}{10}$.

898. $y=\frac{x^6}{100}$.

899. $y=\frac{x^7}{100}$.

Построить гиперболы, являющиеся графиками следующих дробных функций:

900. $y=\frac{1}{x}$.

901. $y=\frac{x}{x-1}$.

902. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

903. $y=2x-1+\frac{1}{x+1}$.

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные оси Ox.

904. $y=\frac{1}{1+x^2}$ (локон Марии Аньези).

905. $y=\frac{x}{1+x^2}$ (серпентин Ньютона).

906. $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные осям:

907. $y=\frac{1}{x^2}$.

908. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

909. $y=\frac{x}{3-x^2}$.

910. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

911. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

912. $y=\frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}$.

Построить графики дробных функций, имеющие вертикальные и наклонные асимптоты:

913. $y=x+\frac{1}{x^2}$.

914. $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$.

Построить графики следующих иррациональных функций:

915. $y=\pm\sqrt{x-2}$ (парабола).

916. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$ (эллипс).

917. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$ (гипербола).

918. $y=\pm\frac{x\sqrt{x}}{2}$ (парабола Нейля).

919. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (циссоида Диоклеса).

920. $y=\pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

921. $y=x^{\frac{2}{3}}$.

922. $y=\pm x^{\frac{3}{4}}$.

Построить графики следующих трансцендентных функций:

923. $y=a^x$ при $a>1$ и при $a<1$.

924. $y=e^{-x^2}$.

925. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

926. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

927. $y=\ln x$.

928. $y=A\sin x$ при $A=\frac{1}{2}$, 1 и 2.

929. $y=\sin\frac{x}{a}$ при $a=\frac{1}{2}$, 1 и 2.

930. $y=\cos x$.

931. $y=\sin(x+a)$.

932. $y=\frac{\sin x}{x}$.

933. $y=e^{-ax}\sin bx$.

934. $y=\sin x^2$.

935. $y=\operatorname{tg} x$.

936. $y=\frac{1}{\cos x}$.

937. $y=x\sin\frac{1}{x}$.

В высшей математике обратные тригонометрические функции имеют значительно бо́льшую важность, чем в элементарной. По определению имеем:

1) если $\sin y=x$, то $y=\arcsin x$;
2) если $\cos y=x$, то $y=\arccos x$;
3) если $\operatorname{tg} y=x$, то $y=\operatorname{arctg} x$;
4) если $\operatorname{ctg} y=x$, то $y=\operatorname{arcctg} x$.

Определенные таким образом функции от x многозначны. Чтобы сделать их однозначными, в определение этих функций вводят дополнительные условия. Они состоят в том, что значения $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ берутся в сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а значения $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ берутся в сегменте $[0, \pi]$.

Построить графики функций:

938. $y=\arcsin x$.

939. $y=\arccos x$.

940. $y=\operatorname{arctg} x$.

941. $y=\operatorname{arcctg} x$.

942. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

943. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

944. $y=\arcsin(\sin x)$.

945. $y=\arccos(\cos x)$.

946. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Доказать равенства:

947. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ при $x>0$ и $-\frac{\pi}{2}$ при $x<0$.

948. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi$, где

$\varepsilon=0$, если $xy<1$;
$\varepsilon=-1$, если $xy>1$ и $x<0$;
$\varepsilon=1$, если $xy>1$ и $x>0$.

949. $\arcsin x+\arcsin y=\eta\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)+$ $+\varepsilon\pi$, где

$\eta=1$, $\varepsilon=0$, если $xy<0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$;
$\eta=-1$, $\varepsilon=-1$, если $x^2+y^2>1$ и $x<0$, $y<0$;
$\eta=-1$, $\varepsilon=1$, если $x^2+y^2>1$ и $x>0$, $y>0$.

950. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$, если $-1<x<\infty$;

$=-\frac{3\pi}{4}$, если $-\infty<x<-1$.

951. $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\text{при } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

952. $\arcsin \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x$, если $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

953. $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$.

954. $2\,\mathrm{arctg}\,x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x > 1$.

955. $\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{2x-1}{2}\pi\right) = [x]$, т. е. целой части от x, если x — не целое.

956. Доказать, что сумма

$$\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $x^2 < \frac{1}{2}$ не зависит от x.

Если график функции $y = f(x)$ построен, то уравнение $f(x) = 0$ легко решить графически, измерив абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось Ox.

Таким же образом, измеряя абсциссы точек пересечения линий $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, получаем корни уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$. Степень точности такого решения может быть произвольно высока, если вычертить графики в окрестности точек пересечения в соответственно увеличенном масштабе.

957. Решить уравнение $x^3 - 7x + 5 = 0$ построением графика функции $y = \frac{x^3 - 7x + 5}{6}$.

958. Решить уравнение $x^3 + 3x + 2 = 0$, построив график функции $y = \frac{x^3 + 3x + 2}{10}$.

959. Решить уравнение $x^4 - 7x - 5 = 0$, построив графики двух функций: $y = \frac{x^4}{10}$ и $y = \frac{7x+5}{10}$.

960. Решить графически уравнение $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$, построив графики двух функций: $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{5}$ и $y = \frac{3x-2}{5x^2}$.

961. Решить уравнение $2^x = 4x$, построив графики функций

$$y = \frac{2^x}{4} \text{ и } y = x.$$

962. Решить графически систему двух уравнений:

$$x^2 + y = 10, \quad x + y^2 = 4.$$

963. Решить уравнение $x = \operatorname{tg} x$ графическим путем.

964. То же для уравнения $e^x = \sin x$.

965. Найти первые два положительных корня уравнения $x \cos x = 1$, построив графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{x}$.

Изучение последовательностей, заданных законом составления

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \ldots,$$

можно облегчить, изучая графики двух функций: $u = \varphi(x)$ (I) и $v = x$ (II). Для этого проводим вертикаль $x = x_0$ до пересечения в точке A_0 с графиком функции u. Затем через точку A_0 проводим горизонталь до пересечения в точке B_0 с графиком функции v. Отсюда проводим вертикаль до пересечения в точке A_1 с графиком u. Затем снова ведем горизонталь до точки B_1 графика v, и т. д.

Ординаты точек $A_0, A_1, A_2, \ldots$ будут равны числам $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Во многих случаях из чертежа видно, стремятся ли точки x_n к пределу при возрастании n.

966. Последовательность чисел составляется по такому закону:

$$x_1 = \frac{1}{2} e^{-x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{2} e^{-x_1}, \quad x_3 = \frac{1}{2} e^{-x_2}, \ldots,$$

где x_0 — произвольное вещественное число. Доказать, что при $n \to \infty$, $x_n \to \xi$, где ξ — единственный корень уравнения $2\xi = e^{-\xi}$.

967. Числа последовательности составляются по следующему закону:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma x_n + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — данные вещественные числа, такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\gamma \neq 0$; $(\alpha + \delta)^2 \geqslant 4$. Число x_0 выбирается так, что $\gamma x_0 + \delta \neq 0$. Найти $\lim x_n$ при $n \to \infty$.

§ 4. Нахождение производных

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах:

968. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$.

969. $y = x^4 - 3x^2 + 17$.

970. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

971. $y = x^3(x^2 - 1)^2$.

972. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

973. $y = \frac{x}{1-x^2}$.

974. $y = \frac{3x-1}{x^5}$.

975. $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

976. $y = \sqrt{x}$

977. $y = \sqrt[3]{x}$.

978. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

979. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

980. $y=x\sin x$.

981. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$.

982. $y=x\ln x-x$.

983. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$.

984. $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

985. $y=\frac{1}{\sin x}$.

986. $y=\frac{1}{\cos x}$.

987. $y=\frac{1}{\ln x}$.

988. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

989. $y=e^x(\sin x-\cos x)$.

990. $y=(ax+b)^n$.

991. $y=\sin^3 x$.

992. $y=(x^2-1)^5$.

993. $y=\cos^5 x$.

994. $y=\sqrt{3x-5}$.

995. $y=\sin 5x$.

996. $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

997. $y=e^{-x}$.

998. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

999. $y=\ln\sin x$.

1000. $y=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

1001. $y=\ln\operatorname{tg} x$.

1002. $y=x\sqrt{x^2+1}$.

1003. $y=e^{-x^2}$.

1004. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

1005. $y=\ln(x^3+x^2)$.

1006. $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$.

1007. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

1008. $y=\cos ax\cdot\sin bx$.

1009. $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1010. $y=e^{ax}\cos bx$.

1011. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

1012. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1013. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

1014. $y=\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right]$.

1015. $y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1016. $y=\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$.

1017. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\frac{\cos\pi x}{2\sin^3\pi x}$.

1018. $y=e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$.

1019. $y=(x+2a)\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$.

1020. $y=\frac{\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)}{x^2}$.

1021. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$.

1022. $y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}$. **1023.** $y=\ln\frac{3-x^2}{2-x^2}$.

1024. $y=\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\frac{a}{a+x}\right]$. **1025.** $y=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

1026. $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7x$.

1027. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1028. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln\cos x$.

1029. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

1030. $y=\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x$.

1031. $y=\ln\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}$.

1032. $y=\ln\frac{e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+2-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

1033. $y=(x-2)\sqrt{1+e^x}-\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$.

1034. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\sin x)-x$.

1035. $y=\ln\frac{b+a\cos nx+\sqrt{b^2-a^2}\sin nx}{a+b\cos nx}$.

1036. $y=\left(1-\sqrt{1-x}\right)\ln x+2\sqrt{1-x}-2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)$.

1037. $y=\frac{x^2\ln x}{a+bx^2}-\frac{1}{b}\ln\sqrt{a+bx^2}$.

1038. $y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)-\sqrt{x+a}$.

1039. $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **1040.** $y=\arcsin\frac{x}{a}$.

1041. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **1042.** $y=(\arcsin x)^2$.

1043. $y=\arcsin\sin x$. **1044.** $y=\arccos\frac{1}{x}$.

1045. $y=\sqrt{x^2-a^2}+a\arcsin\frac{a}{x}$. **1046.** $y=\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}$.

1047. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. **1048.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$; $x\neq 1$.

1049. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1050.** $y=\arccos(3x-4x^3)$.

1051. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. **1052.** $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1053. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. **1054.** $y=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)$.

1055. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

1056. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

1057. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; $a>b\geqslant 0$.

1058. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right)$.

1059. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}$.

1060. $y=\sqrt{ax-x^2}-a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x}}$.

1061. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}-\frac{\ln(x^2-x+1)}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1062. $y=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$.

1063. $y=\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

1064. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x^3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2x^2}$.

1065. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

1066. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)+\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}\right)$.

1067. $y=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}+\ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}$.

1068. $y=\ln\left(\operatorname{tg}x+\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}\right)+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}}$.

1069. $y=x\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{x}\right)+\ln\left(x+2\sqrt{x}+2\right)-\sqrt{x}$.

1070. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

1071. $y=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}}$.

1072. $y=(x^2+1)(\operatorname{arctg}x)^2-2x\cdot\operatorname{arctg}x+\ln(1+x^2)$.

1073. $y=\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1074. $y=x^x$. **1075.** $y=x^{\sin x}$. **1076.** $y=|x|$. **1077.** $y=x^2\sin\frac{1}{x}$.

1078. Из равенства

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

найти формулу для суммы $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

1079. Из равенства

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

найти формулу для $\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx$.

1080. Из равенства

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

получить формулу для суммы

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x.$$

1081. Из формулы

$$2^{m-1}\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right)=\sin mx$$

вывести формулу

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{m}\right)+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)+\ldots+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{m-1}{m}\pi\right)=$$
$$=m\operatorname{ctg} mx.$$

Получить отсюда, что

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{m}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{m-1}{m}\pi\right)}=\frac{m^2}{\sin^2 mx}.$$

1082. Вывести непосредственно из определения производные функций: $\arcsin x$; $\operatorname{arctg} x$ (см. задачи 948 и 949).

1083. Проверить, что если $xy=1$, то

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}=0.$$

1084. Если $x\sqrt{1-y^4}=y\sqrt{2}$, то

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Доказать.

§ 5. Геометрическое значение производной

Если $y=f(x)$ — уравнение кривой, а функция $f(x)$ имеет производную $y'=f'(x)$, то кривая имеет касательную в точке с абсциссой x. Если α — угол наклона касательной, т. е. угол от положительного направления оси Ox до касательной, то $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$. В силу этого уравнение касательной к кривой имеет вид

$$Y-y=y'(X-x),$$

а уравнение нормали таково:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

Здесь (x, y) — точка касания, а (X, Y) — точка на касательной или нормали. При этом $y'=f'(x)$. Если $M(x, y)$ — точка касания, P — ее проекция на ось Ox, а касательная и нормаль к кривой в точке M пересекают Ox соответственно в точках T и N, то получающиеся отрезки имеют названия: TP — подкасательная, PN — поднормаль, TM — касательная, MN — нормаль. Они выражаются через y и y', взятые в точке касания, по формулам:

$$TP=\frac{y}{y'},\quad PN=yy',\quad TM=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},\quad MN=y\sqrt{1+y'^2}.$$

1085. У параболы $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках (0, 0), (2, 1), (4, 0). Найти их углы наклона к оси Ox.

1086. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy=a^2$ в точке (a, a).

1087. Под каким углом кривая $y=\ln x$ пересекает ось Ox?

1088. Тот же вопрос для синусоиды $y=\sin x$.

1089. При каком значении A синусоида $y=A\sin\frac{x}{a}$ пересекает Oy под углом 45°?

1090. При каком a кривая $y=a^x$ пересекает ось Oy под углом 45°?

1091. Под каким углом пересекаются с осью Oy кривые

$$y=\sin x\sqrt{3},\quad y=\frac{x}{1+x^2},\quad y=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

1092. При каком значении a кривая $y=\frac{ax-x^3}{4}$ пересекает ось Ox под углом 45°?

1093. Доказать, что у параболы $y=ax^2$ подкасательная равна половине абсциссы.

1094. Доказать, что у параболы $y^2=2px$ поднормаль постоянна, независимо от выбора точки касания.

1095. Доказать, что у кривой $y=a^x$ подкасательная имеет постоянную длину.

1096. Доказать, что у параболы $y^2=2px$ подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания.

1097. Доказать, что у цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ ордината есть среднее геометрическое между нормалью и величиной a.

1098. Доказать, что у кривых $y=ax^n$ отношение подкасательной к абсциссе точки касания есть величина постоянная.

1099. Найти уравнение касательной к параболе $y=3x-x^2$ в точке (1, 2).

1100. Найти касательную к параболе $y=\frac{x^2-3x+3}{3}$, параллельную прямой $y=x$.

1101. Доказать, что касательная к гиперболе $xy=a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

1102. Доказать, что у астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ длина отрезка касательной между осями есть величина постоянная.

1103. При каком соотношении между коэффициентами парабола $y=ax^2+bx+c$ касается оси Ox?

1104. Тот же вопрос для параболы 3-го порядка $y=x^3+px+q$.

1105. При каком значении a кривая $y=a^x$ касается прямой $y=x$? Найти точку касания.

1106. Последовательность чисел составляется по такому закону: $x_1=a$, $x_2=a^a$, $x_3=a^{a^a}, \ldots$ и вообще $x_n=a^{x_{n-1}}$. Доказать, рассматривая линии $y=a^x$ и $y=x$, что при $e^{-e}<a<e^{1/e}$ величина x_n стремится к определенному пределу, когда $n\to\infty$.

Если кривая задана в параметрическом виде уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где t — параметр, то производную от y по x удобнее всего находить с помощью дифференциалов: $dx=\varphi'(t)\,dt$, $dy=\psi'(t)\,dt$, отсюда $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ или $y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

1107. Эллипс задан уравнениями $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Найти угол касательной к нему с осью Ox.

1108. Астроида задана уравнениями $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Найти угол касательной к ней с осью Ox в точке, где $t=135°$.

1109. Циклоида задана уравнениями

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Найти угол наклона касательной к ней.

1110. Циклоида образована качением круга по прямой. Доказать, что нормаль к циклоиде проходит через точку касания круга и прямой.

1111. Найти касательную к кривой $x=t^2-3t+4$, $y=t^2-4t+4$ в точке (2, 1).

1112. На кривой $x=2t^3-9t^2+12t-1$, $y=t^2+t+1$ найти точки, касательные в которых параллельны оси Oy.

1113. Найти наклон касательной к кривой

$$x=t^4-2t^3-t^2+4t-2,\quad y=t^4+2t^3-t^2-4t-2,$$

если (0, 0) — точка касания.

§ 6. Производные высших порядков

Производная от первой производной, т. е. $(y')'$ или $[f'(x)]'$, называется второй производной и обозначается через y'' или $f''(x)$.

Производная от второй производной называется третьей производной и т. д. Во избежание смешения с показателем степени показатели производной обозначают числом, поставленным в скобки. Иногда применяют также римские цифры. Если в данной точке кривой $y=f(x)$ величина $y''>0$, то кривая обращена выпуклостью вниз, т. е. в сторону отрицательного направления оси Oy. Если же $y''<0$, то кривая в окрестности данной точки обращена выпуклостью вверх. Если при переходе через данное значение x величина y'' меняет знак, то точка на кривой при этом x есть точка перегиба.

1114. Показать, что кривая $y=\ln x$ выпукла вверх.

1115. Показать, что кривая $y=a^x$ выпукла вниз.

1116. Показать, что синусоида $y=\sin x$ выпукла вверх, если $y>0$, и вниз, если $y<0$.

1117. Показать, что тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$ выпукла вниз там, где $y>0$, и вверх там, где $y<0$.

1118. Исследовать направление выпуклости кривой $y=ax^3+bx$ при $a>0$.

1119. Найти точки перегиба кривой $y=e^{-x^2}$.

1120. Тот же вопрос для кривой $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производные высших порядков обыкновенно находятся последовательным дифференцированием. Иногда при этом обнаруживается закономерность, позволяющая написать производную высшего порядка, не находя предыдущих. К числу таких случаев относится формула Лейбница для производной порядка n от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+C_n^1u'v^{(n-1)}+C_n^2u''v^{(n-2)}+\ldots+u^{(n)}v.$$

Здесь C_n^1, C_n^2, ... — биномиальные коэффициенты.

В следующих примерах найти производные указанного порядка:

1121. $y=x^5$. Найти $y^{(5)}$. **1122.** $y=x^6$. Найти $y^{(7)}$.

1123. $y=(3x+5)^2(2x^2+3)(x+7)^2$. Найти $y^{(6)}$.

1124. $y=\sqrt[5]{x^3}$. Найти y'''. **1125.** $y=x^5\ln x$. Найти y'''.

1126. $y=a^{3x}$. Найти y'''. **1127.** $y=\dfrac{a}{x^m}$. Найти y^{IV}.

1128. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$. Найти y'''. **1129.** $y=x^2e^{2x}$. Найти y^{IV}.

1130. $y=x^2\cos 3x$. Найти y^{IV}. **1131.** $y=x^2e^{2x}$. Найти $y^{(50)}$.

1132. $y=x^2\sin x$. Найти $y^{(10)}$. **1133.** $y=e^x\sin x$. Найти y^{IV}.

1134. $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$. Найти y'''.

1135. $y=x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Найти y^{IV}.

1136. Полагая $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$, доказать равенства $y'' = 2z$, $z'' = -2y$.

1137. Доказать, что функция $y = Ce^{-x} + C_1 e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$.

1138. Полагая y равным одной из функций: $\sin(m \arcsin x)$, $\cos(m \arcsin x)$, $\sin(m \arccos x)$, $\cos(m \arccos x)$, доказать, что $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$.

1139. Доказать, что функция $y = e^{-x} \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.

В следующих задачах найти общее выражение для величины $y^{(n)}$ при любом n:

1140. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

1141. $\dfrac{x}{a+bx}$.

1142. $y = \dfrac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$.

1143. $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1144. $y = \sqrt{x}$.

1145. $y = \sin^2 x$.

1146. $y = x^3 e^{mx}$.

1147. $y = x^2 \sin ax$.

1148. $y = x^3 \ln x$.

1149. $y = \ln(ax + b)$.

1150. $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

1151. $y = \sin^3 ax$.

1152. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Доказать равенства:

1153. $[e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + n\varphi + c)$, где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1154. $\left(\dfrac{x^4+1}{x^3-x}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\, n!\left[\dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \right.$ $\left. - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$; $n > 1$.

1155. $(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

1156. Полагая $y = \cos(m \ln x)$, доказать, что

$$x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)\,xy^{(n+1)} + (n^2 + m^2)\,y^{(n)} = 0.$$

1157. Полагая $y = \operatorname{arctg} x$, доказать, что

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

1158. Полагая $y = x^m \ln x$, доказать, что

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}\cdot\left[\ln x + \frac{1}{m} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{m-n+1}\right],$$

при $n \leqslant m$. Если $n = m + 1$, то

$$(x^m \ln x)^{(m+1)} = \frac{m!}{x}$$

1159. Доказать, что производная $y^{(n)}$ сложной функции $y = f(u)$, где $u = x^2$, выражается формулой:

$$y^{(n)} = 2^n x^n f^{(n)} + 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{1}x^{n-2}f^{(n-1)} + \\ + 2^{n-4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4}f^{(n-2)} + \ldots$$

1160. Производная порядка n от e^{-x^2} имеет вид $e^{-x^2}H_n(x)$, где $H_n(x)$ — полином, называемый полиномом Чебышева — Эрмита. Доказать справедливость равенств:

1) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$.
2) $H_n(x) - H'_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}(x) = 0$.
3) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$.

1161. Доказать для полиномов Чебышева — Эрмита формулу

$$H_n(x) = (-1)^n\left[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots\right].$$

1162. Полиномы Лагерра $L_n(x)$ определяются формулой

$$[x^n e^{-x}]^{(n)} = e^{-x}L_n(x).$$

Доказать равенства:

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0,$$

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0,$$

$$L_n(x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n^2}{1}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1\cdot 2}x^{n-2} - \ldots\right].$$

1163. Полиномы Лежандра определяются равенством:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}.$$

Доказать равенства:

$$(x^2-1)P''_n(x) + 2xP'_n(x) - n(n+1)P_n(x) = 0,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

1164. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ определяются равенством

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \right]$$

(полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля). Доказать равенство:

$$(x^2 - 1) \frac{d^{m+2} T_n(x)}{dx^{m+2}} + (2m+1) x \frac{d^{m+1} T_n(x)}{dx^{m+1}} + (m^2 - n^2) \frac{d^m T_n(x)}{dx^m} = 0.$$

1165. Производная порядка n от $\arcsin x$ имеет вид

$$p_n(x)(1 - x^2)^{\frac{1-2n}{2}},$$

где $p_n(x)$ — полином. Доказать равенство:

$$(1 - x^2) p_n''(x) + (2n - 3) x p_n'(x) - (n-1)^2 p_n(x) = 0.$$

1166. Для полиномов предыдущей задачи доказать равенства:

$$p_{2m+1}(x) = A \left[1 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{m^2 (m-1)^2 \ldots (m - \nu + 1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2\nu} (2x)^{2\nu} \right],$$

$$p_{2m}(x) = Ax \left[1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(m-1)^2 (m-2)^2 \ldots (m-\nu)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2\nu + 1)} (2x)^{2\nu} \right].$$

Здесь $A = [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)]^2$.

1167. Справедливо равенство:

$$\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n p_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}},$$

где $p_n(x)$ — полином. Доказать равенства:

1) $x^2 p_n'' - [(2n-2)x + 1] p_n' + n(n-1) p_n = 0$,

2) $p_n = 1 + \frac{n}{1}(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-1)(n-2)x^2 +$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)(n-2)(n-3)x^3 + \ldots$$

1168. Доказать равенство $\dfrac{d^n\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$.

Указание. Обозначая левую часть через u_n, доказать равенство $u_n = (n-1) u_{n-1} - u_{n-2}$ и применить полную индукцию.

1169. В равенстве $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]^{(n)} = \frac{p_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ числитель $p_n(x)$ — полином степени n. Доказать равенства:

1) $p_{n+1} + (2n+2)xp_n + n(n+1)(1+x^2)p_{n-1} = 0$,

2) $\frac{dp_n}{dx} + n(n+1)p_{n-1} = 0$,

3) $(1+x^2)p_n'' - 2nxp_n' + n(n+1)p_n = 0$.

1170. Для предыдущих полиномов доказать формулы:

$$p_{2m} = (-1)^m (2m)! \left[\frac{(1+xi)^{2m+1} + (1-xi)^{2m+1}}{2}\right],$$

$$p_{2m-1} = (-1)^m (2m-1)! \left[\frac{(1+xi)^{2m} - (1-xi)^{2m}}{2i}\right].$$

При параметрическом задании связи между переменными $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ производные y_x', y_x'', y_x''', ... следует находить, основываясь на инвариантности первого дифференциала: $y_x' = \frac{dy}{dx}$, $y_x'' = \frac{dy_x'}{dx}$, $y_x''' = \frac{dy_x''}{dx}$.

В следующих примерах найти производные указанного порядка.

1171. $\begin{cases} x = e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ y = e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{cases}$ Найти y_x''.

1172. $\begin{cases} x = a\left(\cos t - \ln \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right), \\ y = a\sin t. \end{cases}$ Найти y_x'''.

1173. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ Найти y_x'''.

1174. $\begin{cases} x = \frac{a\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \frac{a\sin t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1175. $\begin{cases} x = a\cos\varphi\sqrt[n]{\cos n\varphi}, \\ y = a\sin\varphi\sqrt[n]{\cos n\varphi}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1176. $\begin{cases} x = a(1+\cos t)\cos t, \\ y = a(1-\cos t)\sin t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1177. $\begin{cases} x = \frac{a\cos t}{1+2\cos t}, \\ y = \frac{b\sin t}{1+2\cos t}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1178. $\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1179. $\begin{cases} x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}, \\ y = a(2 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1180. $\begin{cases} x = (2n + 1)\cos t - \cos(2n + 1)t, \\ y = (2n + 1)\sin t - \sin(2n + 1)t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1181. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^4y}{dx^4}$.

1182. $\begin{cases} x = a \sin t\,(2 - \sin^2 t), \\ y = b \sin^2 t \cdot \cos t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1183. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a \cos t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^4y}{dx^4}$.

1184. $\begin{cases} x = a \cos t + (at + b) \sin t, \\ y = a \sin t - (at + b) \cos t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1185. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1186. $\begin{cases} x = a[e^t(\sin t + \cos t) - 1], \\ y = a[e^t(\sin t - \cos t) + 1]. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1187. $\begin{cases} x = a\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{\sqrt{\cos t - \sin t}}, \\ y = at - a \ln \sqrt{\cos t - \sin t}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1188. $\begin{cases} x = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t, \\ y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1189. $\begin{cases} x = a\left[\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} - \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{t}{2}\right)\right], \\ y = \dfrac{a}{\cos^3 t}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1190. $\begin{cases} x = a\left[\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} + \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{t}{2}\right)\right], \\ y = \dfrac{a}{\cos^3 t}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1191. $\begin{cases} x = \dfrac{t + t^3}{1 + t^4}, \\ y = \dfrac{t - t^3}{1 + t^4}. \end{cases}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1192. $\begin{cases} x = \dfrac{a}{1+t^2}, \\ y = bt - \dfrac{bt}{2(1+t^2)}. \end{cases}$ Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1193. Доказать, что при $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ имеет место равенство $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$.

1194. Доказать, что при $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$ имеет место равенство

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

1195. Проверить, что если $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, то

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 0.$$

1196. Проверить, что если $A(a - cxy) = b + c(x+y)$, то

$$\frac{dx}{a+bx+cx^2} + \frac{dy}{a+by+cy^2} = 0.$$

1197. Проверить, что, если x и y связаны уравнением

$$x\sqrt{a+by+cy^2} + y\sqrt{a+bx+cx^2} = A(x-y),$$

то

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dy}{y\sqrt{a+by+cy^2}}.$$

1198. Если $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы, такие, что

$$\sqrt{1-P^2(x)} = Q(x)\sqrt{1-x^2},$$

то $\dfrac{dP(x)}{\sqrt{1-P^2(x)}} = n\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, причем n — целое число. Доказать.

Указание. $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые полиномы с одинаковыми коэффициентами при старших членах.

§ 7. Функции нескольких переменных. Их производные и дифференциалы

Следующие примеры показывают, что понятия предела и непрерывности для функций нескольких переменных несколько сложней, чем для одного переменного.

1199. Показать, что $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$,

1200. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4},$$

а величина $\lim\limits_{x,\, y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ все же смысла не имеет.

1201. Показать, что если $x\to\infty$ и $y\to\infty$ так, что отношение $\frac{y}{x}$ имеет любое данное постоянное значение, то $\dfrac{1}{1+(x^2-y)}\to 0$. В то же время эта величина может не стремиться ни к какому пределу, если отношение $\frac{y}{x}$ не постоянное.

1202. Показать, что $f(x)$, определенная равенством

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m n!\,2\pi x,$$

равна единице, если x — рациональное число, и нулю, если x — иррациональное число; m и n — натуральные числа.

1203. Показать, что в любой окрестности точки (0, 0) функция $f(x, y)$, определенная равенствами

$$f(0,\ 0)=0,\ f(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ \text{при}\ x^2+y^2>0,$$

принимает всякое значение в интервале (—1, 1). При этом под окрестностью точки (0, 0) подразумевается любая область (круг, прямоугольник и т. п.), содержащая точку (0, 0) внутри.

1204. Функция определена равенствами:

$$f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\ \text{при}\ x^2+y^2>0,\ f(0,\ 0)=0.$$

Показать, что эта функция непрерывна относительно каждой из переменных x и y в отдельности, не будучи в окрестности точки (0, 0) непрерывной функцией обеих переменных при их совместном изменении.

1205. Показать, что функция, определенная при x^2+y^2 равенством $f(x,\ y)=e^{\frac{x}{x^4+y^4}}$, принимает любое положительное значение в любой области, внутри которой содержится точка (0, 0).

В следующих примерах найти частные производные от указанных функций:

1206. $u=x^3+y^3-3xy$. **1207.** $u=2x^3-3x^2y^2+3y^3$.

1208. $u=xy+xz+yz$. **1209.** $u=x^y$.

1210. $u=x^3+yz^2+3xy-x+z$.

1211. $u=e^{xy}$. **1212.** $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1213. $u=xy-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}$.

1214. $u=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$.

1215. $u=(xy)^z$. 1216. $u=z^{xy}$.

Найти полные дифференциалы от функций:

1217. $u=\sin(x^2+y^2)$. 1218. $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1219. $u=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$. 1220. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1221. $u=\ln(x+y+z)$. 1222. $u=x^y$.

Если при увеличении всех переменных в t раз функция умножается на t^n, то она называется однородной функцией измерения n. Так, например, если

$$f(tx,\ ty,\ tz)=t^n f(x,\ y,\ z),$$

то $f(x,\ y,\ z)$ — однородная функция измерения n. По теореме Эйлера, если $f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ — однородная функция степени n, то имеет место равенство

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+x_m\frac{\partial f}{\partial x_m}=nf(x_1\ x_2\dots,\ x_m).$$

Проверить на следующих примерах теорему Эйлера непосредственным вычислением производных:

1223. $u=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{x}{y}$. 1224. $u=\frac{x}{y}e^{\frac{x}{z}}$.

1225. $u=\sin\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 1226. $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$.

1227. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 1228. $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1229. Найти производную функции $f=4x^3-2xy^2+3y^3$ в точке (1, 2) по направлению 60° к оси Ox.

1230. Найти производную функции $f=5x+10x^2y+y^5$ в точке (1, 2) по направлению, идущему к точке (5, —1).

1231. Найти производную функции $f=x^2+y^2$ в точке (1, 2) по направлению прямой $3x+4y=11$: 1) в сторону возрастающих x-ов, 2) в сторону убывающих x-ов.

1232. Написать выражение производной функции $f(x,\ y)$: 1) по направлению касательной к кривой $\varphi(x,\ y)=C$, 2) по направлению нормали к кривой $\varphi(x,\ y)=C$.

1233. Найти производную функции $f=x^3+2xy^2+3yz^2$ в точке (3, 3, 1) по направлению вектора $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

1234. Найти производную функции $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ по направлению внешней нормали к поверхности $F=\text{const}$.

Найти частные производные в следующих примерах:

1235. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

1236. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

1237. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $u = x\sin(x+y) + y\cos(x+y)$.

1238. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u = x^y$.

1239. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, если $u = \ln(x+y)$.

1240. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$, если $u = \ln(x^2+y^2)$.

1241. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1242. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

Найти дифференциалы в следующих примерах:

1243. d^2u, если $u = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7$.
1244. d^2u, если $u = x^2y^2$.
1245. d^2u, если $u = e^{xy}$.
1246. d^2u, если $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
1247. d^2u, если $u = \sin(x+y+z)$.
1248. d^4u, если $u = x^4 + 4x^3y + 2xy^2z - 3xyz^2 + z^4$.
1249. d^4u, если $u = x^4 - 3x^2y^2 + y^4 + 5xyz - x^3 - y^3 + x^2 - xy + y^2 + 2x - 5y$.
1250. d^4u, если $u = x^4 + 3x^3y + z^4 - x^2y + z^3$.
1251. d^3u, если $u = xyz$.
1252. d^4u, если $u = \ln(2x+3y-z)$.

Найти частные производные, вычислив сначала полные дифференциалы нужного порядка.

1253. $u = \sin(2x+y)$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}$.

1254. $u = \cos(x+y)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$.

1255. $u = \ln(ax+by+cz)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$.

1256. $u = e^{x+2y+3z}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

Найти полные дифференциалы первых двух порядков для сложных функций в следующих примерах:

1257. $u = \varphi(t)$; $t = xy$.
1258. $u = \varphi(t)$; $t = x^2 + y^2$.
1259. $u = \varphi(t)$; $t = x^2 + y^2 + z^2$.
1260. $u = \varphi(\xi, \eta)$; $\xi = ax + by + cz$, $\eta = a_1x + b_1y + c_1z$.
1261. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$; $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

Найти производные первых двух порядков от функций:

1262. $u=\varphi(\xi, \eta)$; $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

1263. $u=\varphi(\xi, \eta)$; $\xi=x^2+y^2$, $\eta=xy$.

1264. Найти производные порядка n от $u=\varphi(t)$, где $t=ax+by+cz$.

1265. Найти $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, если $u=\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

1266. Показать, что, если $x^2=\eta\xi$, $y^2=\zeta\xi$, $z^2=\xi\eta$, то $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

1267. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, найти $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

1268. Полагая $x=\rho\sin\varphi\cos\psi$, $y=\rho\sin\varphi\sin\psi$, $z=\rho\cos\varphi$, вычислить величину функционального определителя (якобиана)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \psi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}.$$

1269. Положив $r^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi$, найти $\frac{D(\rho, \varphi, \psi)}{D(\rho, r, \psi)}$.

1270. Полагая $x=\xi\eta\zeta$, $y=\xi\eta-\xi\eta\zeta$, $z=\eta-\xi\eta$, найти якобиан $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$.

1271. Доказать, что при $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi\cos\theta$, $z=\sin\varphi\sin\theta\cos\psi$ якобиан равен $-\sin^3\varphi\sin^2\theta\sin\psi$.

1272. Доказать, что при $u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_2=\frac{x_2}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_3=\frac{x_3}{\sqrt{1-r^2}}$, где $r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, справедливо равенство:

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}=(1-r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

1273. Доказать, что

$$\frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}=\frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Здесь $v=v(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — функция с непрерывными вторыми производными.

1274. Доказать, что для однородных функций $\varphi(x, y, z)$ измерения n справедливо равенство:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m\varphi=n(n-1)\ldots(n-m+1)\varphi.$$

1275. Проверить, что $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^2}{4a^2t}}$.

1276. Проверить, что $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, если $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$.

Вычислить выражения:

1277. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u=\varphi(x+y)$.

1278. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

1279. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, если $u=\varphi(xy)$.

1280. Функция, называемая потенциалом шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, определяется равенствами:

$$u=2\pi a^2-\frac{2\pi}{3}(x^2+y^2+z^2)\ \text{при}\ x^2+y^2+z^2<a^2,$$

$$u=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad \text{при}\ x^2+y^2+z^2\geqslant a^2.$$

Проверить, что u и ее первые производные непрерывны при любых x, y и z и что лапласиан

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ \text{или}\ -4\pi,$$

смотря по тому, лежит ли точка $M(x, y, z)$ вне шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ или внутри его.

1281. Проверить равенство

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=0,\ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Проверить следующие равенства:

1282. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$; $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

1283. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$; $z=y\varphi(x^2-y^2)$.

1284. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=xy+u$; $u=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1285. $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}; \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

1286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha^2 u; \quad u=e^{-\alpha x}\varphi(x-y).$

1287. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\varphi''; \quad u=\varphi(y-x)-x\varphi'(y-x).$

1288. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz; \quad z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).$

1289. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2; \quad u=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2.$

1290. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u=\varphi(x+at)+\psi(x-at).$

1291. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0; \quad u=\ln(x^2+y^2).$

1292. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0; \quad u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

1293. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2 u; \quad u=\frac{1}{r}(Ae^{-ar}+Be^{ar}),$ где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1294. $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x\,\partial y}=2z; \quad z=\frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2}.$

1295. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ если $u=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

1296. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n^2 u,$ где

$$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1297. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u,$ где

$$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1298. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ если $u=f[x+\varphi(y)].$

1299. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ если $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y).$

1300. $a^2\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]=b^2\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right],$ где

$$u=\varphi(ay+bx)\,\psi(bx-ay).$$

Замечание. В задачах от 1283 до 1300 содержатся неопределенные функции $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\psi(x+at)$ и т. д. Эти функции могут выбираться произвольно из числа функций, имеющих нужные в данной задаче производные. Сами же эти задачи содержат решения уравнений в частных производных, встречающихся в вопросах математической физики.

§ 8. Дифференцирование неявных функций

Уравнение $f(x, y)=0$, имеющее решением пару чисел (x_0, y_0), определяет в окрестности числа x_0 величину y как функцию от x, если частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ отлична от нуля в точке (x_0, y_0) и непрерывна в ее окрестности. Последовательные производные от y по x могут быть получены из равенств:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}y'+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y''+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'y''+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}y'''=0.$$

. . . .

Подобным путем можно вычислять и производные от неявных функций, заданных одним уравнением с несколькими переменными.

Если несколько неявных функций заданы несколькими уравнениями, то при вычислении производных иногда удобно пользоваться дифференциалами. При этом следует иметь в виду, что дифференциалы высших порядков от тех переменных, которые приняты за независимые, равны нулю.

1301. $x^3+y^3-3axy=0$. Найти y' при $x=y$.

1302. $x^3+y^3-3axy=0$. Найти x, при котором $y'=0$.

1303. $x^y=y^x$. Найти y' при $x\neq y$.

1304. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$. Найти y'.

1305. $x=y-\alpha\sin y$. Найти y' и y''.

1306. $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$. Найти y''' при $x=1$, $y=1$.

1307. $x+y=e^{x-y}$. Найти y''.

1308. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Найти y''.

1309. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Считая здесь x независимой переменной, а y — функцией, взять четвертую производную от обеих частей уравнения.

1310. Для уравнения $x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$ при $x=0$, $y=0$ формула $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$ не дает возможности найти y'; однако y' можно найти и здесь из формулы

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Найти y'.

1311. $(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2)$. Найти y' при $x=0$, $y=0$.

1312. Тот же вопрос для уравнения $x^3+y^3-3xy=0$.

1313. Даны уравнения $x^2-y^2+z^2=1$, $y^2-2x+z=0$. Найти y' и z'' при $x=1$, $y=1$, $z=1$.

1314. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=a^3, \\ x^2+y^2+z^2=b^2. \end{cases}$ Найти y' и z'.

1315. Из уравнений $x^2+y^2-z^2=0$, $x^2+2y^2+3z^2=1$ найти d^2y и d^2z, если x — независимое переменное.

1316. Из уравнений $x^2+y^2=2z^2$, $x^2+2y^2+z^2=4$ найти $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{d^2y}{dz^2}$ в точке $(1, -1,1)$, если z — независимое переменное.

1317. $x+y+z=a$, $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Найти производные от y и z.

1318. В точке $(1,1, -2)$ найти первые и вторые производные от y и z, если $x+y+z=0$, $x^3+y^3-z^3=10$.

1319. $x^2+y^2+z^2=2z$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1320. $x^3+y^3+z^3-3z=0$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

1321. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

1322. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=a$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1323. $xy+xz+yz=1$. Найти dz и d^2z.

1324. Найти d^2z, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1325. Найти d^2z, если $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

1326. Найти d^2z в точке $x=a$, $y=a$, $z=0$, если $x^3+z^3-3axz=y^3$.

1327. Найти вторые частные производные z, если эта функция от x и y определяется уравнением $y=x\varphi(z)+\psi(z)$.

1328. Показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, если $uv=3x-2y+z$, $v^2=x^2+y^2+z^2$.

1329. $xu+yv=0$, $uv-xy=5$; при $x=1$, $y=-1$ принимаем $u=v=2$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$.

1330. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=kt^2$. Найти производные от x и y по z.

1331. $x=a\cos u\sin v$, $y=b\cos u\cos v$, $z=c\sin u$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1332. Показать, что, если $F(x,y,z)=0$, то $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.

1333. Переменная $u=x^3y^2z$, причем сами x, y и z связаны уравнением $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Определить $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $(1, 1, 1)$, когда: а) независимые переменные x и y, б) независимые переменные x и z.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные от неизвестной функции. Нахождение этой функции представляет вообще трудную задачу; мы будем ее рассматривать во второй части. В следующих шести задачах дело идет о более легком вопросе. В нем предлагается проверить, что указанные функции удовлетворяют данным уравнениям.

1334. Показать, что z, определенная как функция от x и y уравнением $x-az=\varphi(y-bz)$, где φ — любая функция, имеющая производную, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

называемому уравнением цилиндрических поверхностей.

1335. Показать, что z, заданный как функция от x и y уравнением $z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, удовлетворяет уравнению конических поверхностей

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

1336. Показать, что при соблюдении уравнений $z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$, $0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)$, z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0.$$

1337. Показать, что при $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0.$$

1338. Функция z от x и y задана уравнениями:

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\quad [z-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)=\alpha x^2.$$

Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

1339. Даны уравнения:

$$z=\frac{\psi(\alpha)}{(x+\alpha)^2\psi'(\alpha)}+\frac{1}{x+\alpha},\quad y+\ln[(x+\alpha)^2\psi'(\alpha)]=0$$

Показать, что

$$\left(z-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

§ 9. Замена переменных

Иногда приходится менять роль переменных, принимая за неизвестные переменные те, которые раньше считались функциями. От этого выражения, содержащие производные, обыкновенно меняют вид.

Если независимое переменное x заменяется новым независимым переменным t с помощью равенства $x=\varphi(t)$, то удобнее всего пользоваться формулами

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\varphi'(t)\,dt},\quad y''_x=\frac{dy'_x}{dx}$$

или

$$y'=\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},\quad y''=\frac{1}{\varphi'(t)}\left[\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}\right]',\quad y'''=\frac{1}{\varphi'}\left\{\frac{1}{\varphi'}\left[\frac{1}{\varphi'}\frac{dy}{dt}\right]'\right\}',\quad \ldots$$

Здесь в левых частях производные взяты по x, а в правых частях производные берутся по t.

В частности, если за новую переменную берется y, то, полагая $x=\varphi(y)$, можем применить прежние формулы, где теперь

$$\frac{dy}{dt}=1;\quad \varphi(t)=x;\quad \varphi'(t)=x',\quad \ldots$$

Таким образом получаются равенства:

$$y'=\frac{1}{x'},\quad y''=-\frac{x''}{x'^3},\quad y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5}\ldots$$

1340. Принять y за новое независимое переменное и преобразовать уравнение $y''-xy'^3+e^yy'^3=0$.

1341. Преобразовать уравнение $y'y'''-3y''^2=0$, приняв независимое переменное x за функцию от y.

1342. Таким же образом преобразовать уравнение:

$$y'^2y^{\text{IV}}-10y'y''y'''+15y''^3=0.$$

1343. В уравнении $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+a^2y=0$ положить $x=\cos t$.

1344. В уравнении $x^2y''+3xy'+y=0$ положить $x=e^t$.

1345. В уравнении $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$ положить $t=\ln x$.

1346. В уравнении $(x+a)^3y'''+3(a+x)^2y''+(a+x)y'+by=0$ положить $\ln(a+x)=t$.

1347. В уравнении $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0$ положить $x=\operatorname{tg}t$.

1348. Показать, что подстановкой $x=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}2t$ уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\frac{dy}{dx}+\frac{4m^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}=0$$

преобразуется в такое:

$$y''+4m^2y=0.$$

1349. Подстановкой $x=\sqrt{1-t^2}$ преобразовать уравнение

$$(x-x^3)y''+(1-3x^2)y'-xy=0.$$

Доказать, что новое уравнение будет того же вида, что и прежнее.

1350. Преобразовать уравнение

$$(1-x^2)^2y'''-2x(1-x^2)y'+\frac{2xy}{1-x}=0,$$

положив $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

В следующих задачах удобно воспользоваться независимыми от выбора аргумента формулами, выражающими производные через дифференциалы:

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3},\ldots$$

1351. Преобразовать выражение $\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}$ к полярным координатам, положив $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1352. Тот же вопрос для выражения $\frac{x+yy'}{xy'-y}$.

1353. Тот же вопрос для выражения $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

1354. В уравнении $(1-x^2)^2(a-y'')=by$ положить

$$x=\operatorname{th}\xi,\quad y=\frac{a\eta}{\operatorname{ch}\xi},$$

где ξ — аргумент, а η — функция.

1355. В уравнении $2y''+(x+y)(1-y')^3=0$ положить $x-y=u$, $x+y=v$ и принять u за аргумент, а v — за функцию.

1356. Преобразовать уравнение $y''=\frac{A}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}y$, положив $u=\frac{y}{x-\beta}$, $t=\ln\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ и приняв t за аргумент, а u — за функцию.

1357. Преобразовать уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+xy=0,$$

взяв за новый аргумент $t=\frac{x^2}{4}$.

1358. Преобразовать уравнение

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{dy}{dx}=0,$$

взяв за аргумент y и за новую функцию $z=\ln\frac{y}{x}$.

1359. Переменное x есть функция от t. Вместо него вводится новая функция с помощью дробно-линейной подстановки $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, где $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Доказать равенство:

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

(Шварц).

Указание. Полезно свести вопрос к случаю подстановки $y=\frac{1}{x}$. В этом случае равенство $xy=1$ следует трижды продифференцировать по t.

1360. В уравнении $9y''^2y^{V}-45y''y'''y^{IV}+40y'''^3=0$ переменные x и y подвергаются гомографическому преобразованию по формулам:

$$y=\frac{a_1X+b_1Y+c_1}{aX+bY+c},\quad x=\frac{a_2X+b_2Y+c_2}{aX+bY+c}.$$

Доказать, что вид уравнения не изменится.

В следующих задачах требуется преобразовать выражение, содержащее частные производные по x и по y, вводя новые независимые переменные. Если новые переменные даны равенствами $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Эти равенства позволяют от производных по x и по y перейти к производным по u и v. Следуя тому же пути дальше, можно выразить и производные высших порядков.

1361. В уравнении $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ввести новые независимые переменные u и v, положив $u=x$, $v=x^2+y^2$.

1362. В уравнении $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0$ положить $u=x$, $v=\frac{y}{x}$ и принять u и v за новые независимые переменные.

1363. Такой же вопрос для уравнения

$$(x+mz)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+nz)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

где $u=x$, $v=\frac{y+nz}{x+mz}$.

Преобразовать к полярным координатам, положив $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следующие выражения:

1364. $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$. **1365.** $w=x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}$.

1366. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$. **1367.** $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1368. $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

1369. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = y + ax$, $v = y - ax$.

1370. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$; $2x = u^2 - v^2$, $y = uv$.

1371. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$; $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$.

1372. При помощи подстановки вида $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (a+b)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + ab\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ к виду $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

1373. $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$; $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

1374. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$; $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$.

1375. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$.

1376. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$, если $u = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$?

1377. Тот же вопрос для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

1378. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + aw = 0$, если $w = \varphi(u)$, где $u = (x - x_0)(y - y_0)$?

1379. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0$, если $u = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?

1380. Выражения

$$\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \text{ и } \Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta.$$

1381. Если $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и притом $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$, то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right].$$

Доказать.

1382. Доказать, что, вводя новые переменные по формулам $X=\frac{dy}{dx}$, $Y=x\frac{dy}{dx}-y$, получим, что $x=\frac{dY}{dX}$, $y=X\frac{dY}{dX}-Y$.

1383. Преобразование Ампера состоит в том, что новые переменные вводятся формулами:

$$X=x,\ Y=\frac{\partial z}{\partial y},\ Z=z-y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Доказать, что при этом получаются равенства:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial Y}=-y,\ z=Z-Y\frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

1384. Преобразование Лежандра состоит в том, что вместо переменных x, y и z вводятся новые по формулам $X=p$, $Y=q$, $Z=px+qy-z$, где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Доказать, что для производных от новых переменных получаются равенства:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=x,\ \frac{\partial Z}{\partial Y}=y,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}=\frac{t}{rt-s^2},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}=-\frac{s}{rt-s^2},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}=\frac{r}{rt-s^2},$$

где

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

§ 1. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Возрастание и убывание функций. Неравенства

Теорема Ролля. Если в интервале $a < x < b$ производная $f'(x)$ существует и $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(b-h)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень в том же интервале.

Теорема Лагранжа. Если в интервале $a < x < b$ производная $f'(x)$ существует и $f(a) = \lim\limits_{h \to +0} f(a+h)$, $f(b) = \lim\limits_{h \to +0} f(b-h)$, то

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c),$$

где c — некоторое число в том же интервале.

1385. Доказать, что корни производной от полинома

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

вещественные, и указать пределы, между которыми они заключены.

1386. Доказать, что производная от полинома, все корни которого вещественны, не имеет мнимых корней.

1387. Доказать, что полином Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

имеет все корни вещественные и лежащие в интервале $(-1, 1)$.

1388. Доказать, что у полинома Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

все корни положительные.

1389. Доказать, что у полинома Эрмита — Чебышева $e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ все корни вещественные.

1390. Существует равенство $\frac{d^n \operatorname{arctg} x}{dx^n} = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$. Доказать, что все корни этого полинома вещественны.

1391. При каких значениях x функция $\frac{x}{1+x^2}$ возрастает?

1392. При каких значениях x функция $x^3(1-x)$ убывает?

1393. Доказать, что функция $x^n e^{-x}$, где $n > 0$, возрастает при $0 < x < n$ и убывает при $x > n$.

1394. Доказать, что при $0 < x < \pi$ функция $\frac{\sin x}{x}$ убывающая.

1395. Доказать, что при увеличении числа сторон периметр правильного вписанного многоугольника возрастает, а периметр описанного — убывает.

1396. Доказать, с помощью теорем о возрастании функций, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает при любых $n > 0$.

Пользуясь формулой Лагранжа, доказать неравенства:

1397. $n(b - a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b - a)b^{n-1}$ при $b > a > 0$, $n > 1$.

1398. $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

1399. $e^x > 1 + x$.

1400. $e^x > ex$ при $x > 1$.

1401. $x^\delta |\ln x| < \frac{1}{\delta e}$ при $0 < x < 1$, $\delta > 0$.

1402. Доказать теорему: если при $x = 0$ функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x)$ обращаются в нуль, а функция $\varphi^{(n)}(x)$ положительна при $x > 0$, то $\varphi(x) > 0$ при положительных x.

1403. Доказать теорему: если

$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi'(0) = \psi'(0), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(0) = \psi^{(n-1)}(0)$$

и $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > 0$, то при положительных x справедливо неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$.

Доказать неравенства:

1404. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$.

1405. $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$ при $x > 0$.

1406. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

1407. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$; $x > 0$.

1408. Непосредственным возведением в квадрат доказать неравенства

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x < 8.$$

1409. Доказать, что при $0 < x < 1$ величина e^{2x} меньше, чем $\frac{1+x}{1-x}$.

1410. Доказать, что если p_n — периметр правильного вписанного, а P_n — правильного описанного многоугольника, то $\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}P_n$ больше длины окружности (Гюйгенс).

1411. Доказать, что у геометрической прогрессии с положительными слагаемыми сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, меньше суммы крайних членов.

1412. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы, а все члены прогрессий положительны. Показать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1413. Числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ положительны, а точки

$$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_n, y_n)$$

лежат на кривой $y=\varphi(x)$. Доказать, что если кривая выпукла вниз, то имеет место неравенство

$$\varphi\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right)<\frac{m_1\varphi(x_1)+m_2\varphi(x_2)+\ldots+m_n\varphi(x_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Если же кривая выпукла вверх, то знак неравенства меняется на обратный.

Следующие задачи сводятся к предыдущей. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в них положительны. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предполагаются положительными и такими, что среди них имеются неодинаковые.

1414. Доказать, что при $m>1$ справедливо неравенство:

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)^m<\alpha_1x_1^m+\alpha_2x_2^m+\ldots+\alpha_nx_n^m,$$

где $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$.

1415. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел меньше среднего квадратичного тех же чисел, т. е. что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}<\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

1416. Доказать, что при $m>1$ и положительных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m<n^{m-1}(x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m).$$

1417. Если числа α и числа x положительны и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$, то справедливо неравенство

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n>x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

В частности, среднее арифметическое положительных чисел больше среднего геометрического тех же чисел. Доказать.

1418. При любых вещественных значениях коэффициентов a_ν и b_ν, а также переменного x имеет место очевидное неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu x+b_\nu)^2 \geqslant 0.$$

Исходя из него, получить неравенство Коши:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

В следующих задачах полезно применить преобразование координат.

1419. Доказать, что на окружности $x^2+y^2=1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{a^2}\leqslant Ax^2+Bxy+Cy^2\leqslant\frac{1}{b^2},$$

если кривая $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ есть эллипс с полуосями a и b.

1420. Поверхность $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=1$ после соответственного поворота осей имеет уравнение $A_1x_1^2+B_1y_1^2+C_1z_1^2=1$, где $A_1<B_1<C_1$. Доказать неравенство

$$A_1\leqslant\frac{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant C_1.$$

§ 2. Нахождение наибольших и наименьших значений функций одного переменного

В дальнейшем под наибольшим значением функции подразумевается значение, большее всех достаточно близких соседних, и под наименьшим — меньшее всех достаточно близких соседних. Нахождение наибольших и наименьших значений, в собственном смысле слова, сводится к нахождению таких наибольших и наименьших значений по сравнению с соседними, а также к изучению значений функции на концах интервала, в котором она изучается. Основной признак, дающий возможность находить наибольшие или наименьшие (экстремальные) значения функции, доставляет следующая теорема:

Если при переходе через некоторое значение аргумента производная от функции меняет знак + на — (при изменении аргумента от меньших значений к бóльшим), то функция получает наибольшее значение; если же знак производной переходит с — на +, то функция получает наименьшее значение.

Часто бывает удобен и другой критерий:

Если при некотором значении аргумента величина первой производной равна нулю, а вторая производная отрицательна, то функция имеет максимум; если первая производная равна нулю при положительном значении второй производной, то функция имеет минимум.

1421. Найти максимум функции $y=6x-x^2$.

1422. Найти минимум функции $y=x^2-8x$.

1423. Найти экстремальные значения функции $y=x^3-12x$.

1424. Показать, что функция $y=x^3(8-x)$ имеет максимум при $x=6$ и не имеет экстремума при $x=0$.

1425. Показать, что функция $y=x^2+\frac{1}{2}x^2\sin\frac{1}{x}$ имеет минимум при $x=0$, хотя первая производная при переходе x через нуль не меняет знака ни с $-$ на $+$, ни с $+$ на $-$.

Найти экстремальные значения следующих функций:

1426. $y=x^3-3x^2+6x+7$. **1427.** $y=x^3-9x^2+15x-3$.
1428. $y=a+(x-b)^4$. **1429.** $y=a+(x-b)^3$.
1430. $y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$.
1431. $y=x^5-5x^4+5x^3-1$. **1432.** $y=(x-4)^4(x+3)^3$.
1433. $y=\frac{x}{1+x^2}$. **1434.** $y=x+\frac{1}{x}$.
1435. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$. **1436.** $y=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$.
1437. $y=\frac{x^4+1}{x^2}$. **1438.** $y=\frac{x^2}{x^4+4}$.
1439. $y=x\ln x$. **1440.** $y=x^2\ln x$.
1441. $y=x^x$. **1442.** $y=x\ln^2 x$.
1443. $y=x^ne^{-x}$., n — положительное.
1444. $y=x^2e^{-x^2}$.
1445. $y=e^x+e^{-x}$. **1446.** $y=e^{-x}-e^{-2x}$.
1447. $y=x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$ при $-2\leqslant x\leqslant 2$.
1448. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. **1449.** $y=e^x\cos x$.
1450. $y=\frac{\sin x}{1-e^2\cos^2 x}$ при $e^2<1$ (рассмотреть два случая: $2e^2>1$ и $2e^2<1$).
1451. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+a)}$ при $0<a<\frac{\pi}{2}$. **1452.** $y=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$.
1453. $y=\sin 3x-3\sin x$. **1454.** $y=\arcsin\sin x$.

Найти экстремальные значения функций y, заданных неявно следующими уравнениями:

1455. $y^2+2yx^2+4x-3=0$. **1456.** $y^2+2yx^2-4x-3=0$.
1457. $xy^2-x^2y=2a^3$.
1458. $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$.
1459. $x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0$.
1460. $x^2+4xy+4y^2+x+2y-1=0$.
1461. $x^3+y^3-3axy=0$ при $a>0$.
1462. $x^4+y^4-4xy=0$. **1463.** $x^4+y^4=x^2+y^2$.

§ 3. Построение графиков функций

Графики, предлагаемые в этом параграфе, должны строиться с помощью теорем о возрастании функций, исследования экстремальных значений и направления выпуклости кривой, если это оказывается возможным.

1464. $y = x^3 - 3a^2x.$

1465. $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}.$

1466. $y = (x+1)^2(x-2).$

1467. $y = \frac{x-1}{x^2 - 3x - 4}.$

1468. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$

1469. $y = Ae^{-\frac{x^2}{a^2}}$; $A > 0.$

1470. $y = x^n e^{-\frac{x}{a}}$, $n > 0, a > 0.$

1471. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$

1472. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}.$

1473. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$

1474. $y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}.$

1475. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$

1476. $y = \frac{x^2+1}{x^2 - 4x + 3}.$

1477. $y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

1478. $y = \frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}.$

1479. $2y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}.$

1480. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}.$

1481. $y = \pm x^2\sqrt{x+1}.$

1482. $y = (x+1)^3\sqrt[3]{x^2}.$

1483. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$

1484. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$

1485. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}.$

1486. $y = \pm\frac{x}{\sqrt{x+1}}.$

1487. $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$

1488. $y = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1489. $y = \pm\frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}.$

1490. $ay = \pm x\sqrt{x(a-x)}$, $a > 0.$

1491. $y^2 = x^3 + px + q$ при $4p^3 + 27q^2 > 0.$

1492. $y^2 = x^3 + px + q$ при $4p^3 + 27q^2 < 0.$

1493. $y^2 = x^3 + px + q$ при $4p^3 + 27q^2 = 0.$

1494. $y = \cos^3 x + \sin^3 x.$

1495. $y = \cos^4 x + \sin^4 x.$

1496. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x.$

1497. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

1498. $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$.

1499. $y=\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$. **1500.** $y=\frac{\sin x}{x}$. **1501.** $y=\sin x^2$.

1502. $y=x\ln x$. **1503.** $y=x^2\ln x$. **1504.** $y=\ln(x^2-1)$.

1505. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

1506. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x\geqslant -1$.

Изучение графиков соответствующих функций во многих случаях позволяет определить число вещественных корней уравнений, даже в случае наличия буквенных коэффициентов. Так, например, имея уравнение $ae^x=x^3$, переписываем его в таком виде: $x^3e^{-x}=a$. После этого вопрос сводится к определению числа точек пересечения прямой $y=a$ и кривой $y=x^3e^{-x}$. Ордината последней возрастает от $-\infty$ до $27e^{-3}$ при возрастании x от $-\infty$ до 3. После этого она убывает до нуля при x, изменяющемся от 3 до $+\infty$. Отсюда следуют выводы: a) при $a>27e^{-3}$ уравнение не имеет вещественных решений; b) при $a=27e^{-3}$ уравнение имеет корень $x=3$ — это будет кратный корень; c) при $0<a<1{,}3$ уравнение имеет два вещественных корня: $0<x_1<3$ и $x_2>3$; d) при $a<0$ уравнение имеет один отрицательный корень.

Определить число вещественных корней уравнений:

1507. $12x^4-14x^3-3x^2-5=0$.

1508. $x^4-4ax^3-2=0$. **1509.** $2x^3-3ax^2+1=0$.

1510. $x\ln x=a$. **1511.** $\ln x=ax$.

1512. Доказать, что уравнение $x^3+px+q=0$ при вещественных p и q имеет один вещественный корень при $4p^3+27q^2>0$ и три вещественных корня при $4p^3+27q^2<0$.

1513. Доказать, что при $a>1$ уравнение $a^x=bx$ имеет два вещественных корня при $b>e\ln a$, не имеет ни одного вещественного корня при $e\ln a>b>0$ и имеет один корень при $b<0$.

Определить, при каких значениях параметра следующие уравнения имеют указанное число вещественных корней:

1514. $3x^4+4x^3-6x^2-12x+m=0$ — два различных корня.

1515. $2x^3-13x^2-20x+m=0$ — один корень.

1516. $3x^4-14x^3-45x^2+m=0$ — четыре различных корня.

1517. $2x^3-4x^2-30x+m=0$ — два совпадающих корня и один простой.

1518. $x^2+x+e^{-x}+m=0$ — два совпадающих корня.

1519. $x^2-x-\ln x+m=0$ — ни одного корня.

1520. $6\operatorname{arctg} x-x^3+m=0$ — три корня, из которых два совпадающих.

§ 4. Разные задачи на наибольшие и наименьшие значения

1521. Определить наибольшую площадь прямоугольника с периметром $4a$.

1522. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса a.

1523. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в сегмент круга радиуса a, если центральный угол, замыкаемый сегментом, равен 2α.

1524. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в параболический сегмент, ограниченный параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{m^2}{2p}$.

1525. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h.

1526. По углам прямоугольной пластинки со сторонами a и b вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся крестообразной фигуры образована коробочка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается наибольший объем коробочки.

1527. Поперечное сечение бревна есть круг радиуса a. Из бревна вытесывается брус с прямоугольным поперечным сечением. Прочность бруса пропорциональна основанию и квадрату высоты поперечного сечения. Найти форму поперечного сечения, при которой брус имеет наибольшую прочность.

1528. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса a с центральным углом 2α.

1529. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в шар радиуса a.

1530. Найти наибольший объем цилиндра, у которого периметр осевого сечения равен $6m$.

1531. Найти наибольшую боковую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса a.

1532. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в данный конус.

1533. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в сегмент параболоида $az = x^2 + y^2$, $a > 0$, ограниченный плоскостью $z = h > 0$.

1534. Найти наибольший объем конуса, вписанного в шар радиуса a.

1535. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса a.

1536. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса a.

1537. Найти наибольший объем цилиндра, ось которого проходит по диагонали куба с ребром a, а основания которого касаются граней куба.

1538. Найти наибольший объем цилиндра, ось которого пересекает под прямым углом ось данного цилиндра с радиусом a, а основания которого касаются боковой поверхности данного цилиндра.

1539. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

1540. Из сектора круга данного радиуса свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

1541. Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего данный объем V.

1542. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Какими должны быть его стороны, чтобы объем тела, полученного от вращения этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим.

1543. Цилиндр завершен сверху полушаром того же радиуса. Дан объем всего тела V. При каком радиусе полная поверхность тела будет наименьшей?

1544. Точки равномерно движутся по осям координат со скоростями v_1 и v_2. В начальный момент они занимали положения $(a, 0)$ и $(0, b)$. Найти кратчайшее расстояние между точками.

1545. Найти кратчайшее расстояние от точки (x_1, y_1, z_1) до точек прямой $x = a + lt$, $y = b + mt$, $z = c + nt$.

1546. Точка перемещается в среде I со скоростью v_1, а в среде II со скоростью v_2. Линия раздела сред прямолинейна. Доказать, что перемещение движущейся точки из точки A в одной среде в точку B в другой среде совершается в кратчайшее время при условии, что путь состоит из прямолинейных отрезков AC и CB, где C — на границе двух сред, причем $\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$, где φ_1 и φ_2 — углы, образованные прямыми AC и CB с линией раздела.

1547. Точка движется по плоскости со скоростью v_1, а попав на ось Ox, может двигаться со скоростью $v_2 > v_1$. Найти скорейший путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$.

1548. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

1549. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравновешивается силой f на другом конце. При этом на расстоянии a от точки опоры подвешен груз p, а вес единицы длины рычага равен m. Определить длину рычага x так, чтобы сила f была наименьшая.

1550. Из точек A и A_1 по прямым AO и A_1O по направлению к точке O выходят одновременно два тела со скоростями v и v_1. При этом $AO = l$, $A_1O = l_1$, а угол между AO и A_1O равен α. Когда расстояние между телами наименьшее?

1551. Чашка имеет форму полушара радиуса a. В нее опущен стержень длины $l > 2a$. При каком положении стержня его середина находится ниже всего (положение равновесия)?

1552. Стержень длиной $2b$ опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится выше всего?

1553. Светящаяся точка находится на линии центров двух шаров. При каком ее положении сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1554. Яркость освещения выражается формулой $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние от площадки до источника света, m — постоянная (сила источника света). На какой высоте h надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии a от столба было наибольшим?

1555. Сосуд с вертикальной стенкой высотой h стоит на горизонтальной плоскости. Из отверстия в стенке бьет струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи наибольшая, если скорость вытекающей жидкости, по закону Торричелли, равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина отверстия.

1556. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание равно a.

1557. На одной стороне прямоугольника построен полукруг. Дан периметр всей получившейся фигуры. Найти наибольшую возможную площадь этой фигуры.

1558. На странице книги печатный текст должен занимать площадь S; верхнее и нижнее поля должны быть шириной a, правое и левое — шириной b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей.

1559. Найти внутренние размеры открытого цилиндрического сосуда данной емкости V с толщиной стенок a, на который потребуется минимум материала.

1560. Определить наибольшую возможную разность между углами, составляемыми с плоскостью основания ребром и апофемой правильной n-угольной пирамиды.

1561. Из какой точки оси Ox отрезок на оси Oy, лежащий между точками $(0, h)$ и $(0, H)$, виден под наибольшим углом $(H > h > 0)$?

1562. Через точку A внутри угла провести прямую MN так, чтобы сумма отрезков сторон $OM + ON$ была наименьшей.

1563. Через точку внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

1564. Верхним основанием правильной шестигранной призмы является шестиугольник $ABCDEFA$. Через точку O на оси призмы, лежащую выше верхнего основания, и через диагонали AC, CE и EA

проведены три плоскости пересекающие в точках B_1, D_1 и F_1 боковые ребра призмы, не проходящие через A, C и E. Объем многогранника, ограниченного с боков и снизу гранями призмы, а сверху крышей $OAB_1CD_1EF_1A$, не зависит от выбора точки O. При каком условии поверхность многогранника будет наименьшей? (Задача о пчелиных сотах.)

1565. Плоскость, параллельная противоположным ребрам тетраедра, пересекает его по параллелограмму. Когда площадь этого параллелограмма наибольшая?

1566. Две стороны параллелограмма — на сторонах треугольника, а вершина — на третьей стороне. Когда площадь этого параллелограмма наибольшая?

1567. Прямой круговой конус пересекается плоскостью по параболическому сегменту. Площадь такого сегмента равна произведению $\frac{2}{3}$ основания на высоту. Найти наибольшую площадь сегмента.

1568. К окружности проведены две касательные. Провести третью касательную так, чтобы треугольник, ограничиваемый касательными, имел наименьшую площадь.

1569. Через точку внутри прямого угла провести прямую так, чтобы ее отрезок между сторонами угла был наименьшим.

1570. Через точку внутри прямого угла провести прямую так, чтобы периметр получившегося треугольника был наименьшим.

1571. Найти точку на кривой $xy^2 = a^2(a - x)$, для которой подкасательная максимальна.

1572. В какой точке кривой $x^n y = a^{n+1}$ надо провести касательную, чтобы ее отрезок между осями координат был наименьшим?

1573. Найти наибольшее расстояние от начала координат до касательной к кривой $x^n y = a^{n+1}$.

1574. Найти на параболе $y^2 = 2px$ точку, ближайшую к точке $(a, 0)$. Исследовать результат в зависимости от a.

1575. Найти наименьшую величину отрезка нормали к параболе $x^2 = 2py$, лежащего внутри параболы.

1576. К параболе провести нормаль, отсекающую от нее сегмент наименьшей площади.

1577. Найти наименьшую возможную площадь треугольника, образованного касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осями координат.

1578. Определить наибольший (наименьший) угол между сопряженными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1579. Определить наибольший угол между нормалью к эллипсу $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ и диаметром, проведенным в ту же точку.

1580. Найти наибольшее расстояние от нормали к эллипсу $x=$ $=a\cos t$, $y=b\sin t$ до его центра.

1581. Найти наибольшее расстояние точки эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ от конца его малой полуоси. Проанализировать разные случаи ($a^2 \gtreqless 2b^2$).

1582. В полукруг радиуса R вписать эллипс наибольшей площади ($s=\pi ab$; см. предыдущую задачу).

1583. Две точки параболы $y=Ax^2$, имеющие абсциссы a и b, надо соединить ломаной в два звена так, чтобы наибольшая по абсолютной величине разность соответствующих ординат параболы и ломаной была бы наименьшей. Найти положение промежуточной вершины ломаной и точек пересечения ломаной с параболой. Во сколько раз эта „ошибка“ будет меньше „ошибки“ хорды.

1584. Дугу параболы $y=Ax^2$ между точками с абсциссами a и b надо заменить ломаной в n звеньев с наименьшей „ошибкой“. Проверить, что наименьшая „ошибка“ равна $\frac{h}{2n^2}$, если h стрелка дуги (ошибка хорды).

§ 5. Ряды, их сходимость

Если при $n \to \infty$ сумма $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ стремится к некоторому определенному конечному пределу s, то говорят, что ряд $u_1 + u_2 + \ldots +$ $+ u_n + \ldots$ — сходящийся, а s — его сумма. В этом случае пишем: $u_1 + u_2 +$ $+ \ldots + u_n + \ldots = s$. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ состоит в том, что при любом положительном постоянном ε можно найти такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

при всех $n > n_0$ и любых положительных p.

Ряд не сходящийся называется расходящимся.

В следующих примерах можно установить сходимость ряда и величину его суммы непосредственно.

1585. Непосредственным делением по возрастающим степеням можно установить тождество:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Исходя из него, показать, что ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

сходится при $|x| < 1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$.

1586. Пользуясь тождеством $\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}=\frac{1}{\nu(\nu+1)}$, доказать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

сходится и имеет сумму, равную единице.

1587. Доказать равенство

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

1588. Доказать равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots=\frac{1}{4}.$$

1589. Пользуясь указанием задачи 1586, найти

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots$$

1590. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n+1})=v_1-v,$$

где предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=v$.

1591. Установив равенство:

$$\frac{m}{(m+1)(m+2)}+\frac{m}{(m+2)(m+3)}+\frac{m}{(m+3)(m+4)}+\ldots=\frac{m}{m+1},$$

доказать, что в данном случае при $m\to\infty$ предел суммы ряда не равен сумме пределов членов ряда, именно: $\lim\limits_{m\to\infty}(u_1+u_2+u_3+\ldots)=1$, а

$$\lim u_1+\lim u_2+\lim u_3+\ldots=0+0+0+\ldots=0.$$

Одним из способов изучения сходимости рядов является признак сравнения: если члены данного ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots$ по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося ряда положительных слагаемых $v_1+v_2+v_3+\ldots$, то данный ряд — сходящийся. В этом случае ряд называется абсолютно сходящимся.

Если ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. Если же u_n при $n\to\infty$ не стремится к нулю, то ряд расходящийся.

Исследовать сходимость следующих рядов при разных значениях переменного x:

1592. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$

1593. $x+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\ldots$

1594. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}-\frac{x^3}{7}+\ldots$

1595. $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2x}{2\cdot 3}+\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\ldots$

1596. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

1597. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots$

1598. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1^2}+\frac{1}{x^2+2^2}+\ldots$

Указание. Воспользоваться неравенством: $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$.

Во многих случаях для изучения сходимости рядов полезен признак Даламбера: если, начиная с некоторого места, отношение последующего члена ряда к предыдущему по абсолютной величине меньше одной и той же правильной дроби q, т. е. если $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<q$, где $q<1$, то ряд сходится (абсолютно). В частности: если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$, то ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, то ряд расходится. Случай $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$ исследуется особо.

Исследовать сходимость рядов:

1599. $1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$

1600. $1+x+1\cdot 2x^2+1\cdot 2\cdot 3x^3+\ldots$

1601. $x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots$

1602. $x+\frac{2x^2}{3}+\frac{2^2x^3}{5}+\frac{2^3x^4}{7}+\ldots$

1603. $x+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1\cdot 2}{3^3}x^3+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4^4}x^4+\ldots$

1604. $x+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}x^3+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}x^4+\ldots$

1605. $\frac{x-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\ldots$

1606. $1+\frac{1}{2x\sqrt{2}}+\frac{1}{4x^2\sqrt{3}}+\frac{1}{8x^3\sqrt{4}}+\frac{1}{16x^4\sqrt{5}}+\ldots$

1607. $\frac{x-3}{a}+\frac{(x-3)^2}{a+b}+\frac{(x-3)^3}{a+2b}+\frac{(x-3)^4}{a+3b}+\ldots;\ a>0,\ b>0.$

1608. $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{x+2}\right)^5-\ldots$

1609. $\dfrac{1+x}{x+\frac{1}{x}}+\dfrac{5+x}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\dfrac{25+x}{4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3}+\dfrac{125+x}{8\left(x+\frac{1}{x}\right)^4}+\ldots$

1610. $\operatorname{tg} x-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{5}+\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{9}-\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{13}+\ldots$

1611. $1+\dfrac{2\sin x}{3}+\dfrac{4\sin^2 x}{5}+\dfrac{8\sin^3 x}{7}+\dfrac{16\sin^4 x}{9}+\ldots$

1612. $x+\dfrac{x^4}{1\cdot 2}+\dfrac{x^9}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{n!}$.

1613. $\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{2}{e^{2x}-1}+\dfrac{3}{e^{3x}-1}+\ldots$

1614. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если $u_1=1$, а $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{(-1)^n}{2}$.

1615. Ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$ составлен по следующему закону: $u_n=\dfrac{1}{2^{m\sigma}}$, где $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, σ — постоянное число. Доказать, что при $\sigma>1$ ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$ сходится, а сумма его равна $\dfrac{2^\sigma}{2^\sigma-2}$.

1616. Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что при $\sigma>1$ ряд $1+\dfrac{1}{2^\sigma}+\dfrac{1}{3^\sigma}+\dfrac{1}{4^\sigma}+\ldots$ сходится.

1617. Члены ряда составляются по правилу:

$$u_n=\frac{1}{2^{m\sigma}},$$

где $2^{m-1}<n\leqslant 2^m$, σ — постоянное число.

Доказать, что при $0<\sigma<1$ ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$ расходится

1618. Доказать, что ряд $1+\dfrac{1}{2^\sigma}+\dfrac{1}{3^\sigma}+\dfrac{1}{4^\sigma}+\ldots$ при $0<\sigma\leqslant 1$ расходится.

1619. Установить, что ряд $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ — расходящийся, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

В тех случаях, когда $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$ при $n\to\infty$, признак Даламбера недостаточен. Если при этом дробь $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ равна отношению двух полиномов относительно n, то может быть полезно применение признака сходимости Гаусса.

Признак Гаусса. Если $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_m}{n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}$, то ряд сходится при $b_1-a_1>1$ и расходится при $b_1-a_1\leqslant 1$.

Исследовать сходимость рядов:

1620. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

1621. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{4}+\ldots$

1622. $1+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4}+\ldots$

1623. $1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots;\ m>0.$

В обширном классе случаев, когда предыдущие признаки не дают возможности судить о сходимости рядов, можно убедиться в сходимости с помощью других признаков. Из них один, особенно важный, основан на тождестве Абеля

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=$$
$$=\sigma_1(b_1-b_2)+\sigma_2(b_2-b_3)+\ldots+\sigma_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+\sigma_nb_n,$$

где

$$\sigma_m=a_1+a_2+\ldots+a_m.$$

Признак сходимости Дирихле: ряд $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\ldots$ сходится, если сумма $u_1+u_2+\ldots+u_n$ остается ограниченной при возрастании n, а числа $v_1, v_2, v_3,\ldots$ убывают и стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера.

Частный случай признака Дирихле: знакопеременный ряд $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$ сходится, если величина u_n убывает при возрастании n и притом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ (признак Лейбница).

Исследовать сходимость следующих рядов:

1624. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots;\quad 1-\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}-\frac{1}{4^\sigma}+\ldots$

1625. $1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots;\ m>-1.$

1626. $1-\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4}+\ldots$

1627. $\sin x-\sin\sin x+\sin\sin\sin x-\ldots$

1628. $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\ldots$

1629. $\cos x+\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}+\ldots$

Указание к задачам 1628 и 1629. Ограниченность $\sum\limits_1^n \sin kx$, $\sum\limits_1^n \cos(2k+1)x$ можно доказать, если найти суммы $\sum\limits_1^n 2\sin\frac{x}{2}\sin kx$; $\sum\limits_1^n 2\sin x\cos(2k+1)x$.

1630. $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\ldots$

1631. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$

Если ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$ сходится, а ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$, составленный из абсолютных значений его членов, расходится, то данный ряд называется неабсолютно сходящимся. Следующие примеры показывают глубокую разницу в характере абсолютной и неабсолютной сходимости.

1632. Пользуясь основным критерием сходимости, доказать, что сумма абсолютно сходящегося ряда не изменится, если расположить те же члены ряда в любом другом порядке.

1633. Показать, что сумма неабсолютно сходящегося ряда не меняется, если члены ряда переставить так, что ни один из них не удаляется со своего места больше, чем на m мест, где m — любое заданное число.

1634. Доказать равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots\right),$$

показав тем самым, что у неабсолютно сходящихся рядов сумма существенно зависит от порядка слагаемых.

1635. Пользуясь равенствами

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots,$$
$$s_1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

доказать, что $s<1$, а $s_1>1$, и, следовательно, $s_1\neq s$.

1636. Доказать, что ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$ — сходящийся, а ряд $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+$ $+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$, полученный из первого перестановкой слагаемых, — расходящийся.

Если ряд, члены которого зависят от x, остается сходящимся в сегменте $a \leqslant x \leqslant b$, то, написав равенство:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+R_n(x),$$

можем быть уверены, что $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ при любом данном x. Поэтому при любом данном $\varepsilon>0$ неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ будет выполняться, если n достаточно велико: $n>n_0$. При этом число n_0, вообще говоря, зависит не только от ε, но и от значения x. Если при любом данном $\varepsilon>0$ неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ выполняется для всех x в интервале $a\leqslant x\leqslant b$, как только $n>n_0$, где n_0 зависит лишь от ε, то ряд называется равномерно сходящимся. Для равномерно сходящихся рядов справедливы теоремы:

1. Предел суммы ряда равен сумме пределов членов ряда.
2. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.
3. Если ряд, составленный из производных от членов данного ряда, сходится равномерно, то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленного из производных от членов данного ряда.
4. Если члены данного ряда по абсолютной величине не больше, чем соответствующие члены сходящегося ряда положительных постоянных слагаемых, то ряд сходится равномерно.

1637. Доказать, что ряд

$$x(1-x)+x^2(1-x)+x^3(1-x)+\ldots$$

сходится в сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$, но неравномерно.

1638. Доказать, что ряд

$$1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

сходится при любом x, но неравномерно. Тот же ряд сходится равномерно в любом конечном сегменте $a\leqslant x\leqslant b$.

1639. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ сходится равномерно при любом x, $-\infty<x<\infty$.

1640. Доказать, что ряд

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\ldots$$

можно дифференцировать почленно.

1641. Доказать, что ряд

$$\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\ldots$$

представляет непрерывную функцию от x.

1642. Пользуясь тождеством Абеля, доказать, что ряды

$$a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x+\ldots,$$
$$a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\ldots$$

при выполнении условий

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \ldots, \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

сходятся равномерно во всяком сегменте, не заключающем ни внутри, ни на концах значений $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

1643. Доказать, что сумма ряда

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}, \quad a > 1,$$

представляет непрерывную функцию.

1644. Доказать, что при $a > 2$ предыдущая сумма ряда имеет производную:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^{n^2} \cos 2^{n^2} x.$$

1645. Доказать, что при $1 < a < 2$ функция $s(x)$ задачи 1643 не имеет производной (будучи, однако, непрерывной).

Указание. Воспользоваться тождеством:

$$s(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin 2^{\nu^2} x}{a^{\nu^2}} + \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin 2^{\nu^2} x}{a^{\nu^2}},$$

где n — любой выбранный номер, и изучать $\frac{\Delta s(x)}{\Delta x}$, при условии, что $n \to \infty$, выбирая числа Δx особым образом в зависимости от выбора номера n.

§ 6. Разложение в ряды

1646. Непосредственным делением, расположив многочлены по возрастающим степеням буквы x, доказать разложения в ряды:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a - bx} &= \frac{1}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} + \ldots, \\ \frac{1}{a + bx} &= \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad \left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

1647. Пользуясь тождеством $\frac{5 - 2x}{6 - 5x + x^2} = \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{3 - x}$, доказать разложение в ряд:

$$\frac{5 - 2x}{6 - 5x + x^2} = \frac{5}{6} + \frac{13}{36}x + \frac{35}{216}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^{n-1} + \ldots; \quad |x| < 2.$$

1648. Предполагая законным разложение в ряд

$$\frac{1}{1-x-x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

и умножая обе части равенства на $1-x-x^2$, доказать, что $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, ... и вообще a_0, a_1, a_2, ... — числа ряда Фибоначчи, определяемые равенствами $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ при $n\geqslant 2$, $a_0=1$, $a_1=1$.

1649. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}\right],$$

найти формулу, дающую общий член a_n ряда Фибоначчи.

1650. Доказать, что в разложении в ряд дроби

$$\frac{a+bx+cx^2}{A+Bx+Cx^2+Dx^3}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots,$$

имеющем место при $A\neq 0$ и при достаточно малых значениях $|x|$, между коэффициентами a_n существует соотношение: $Aa_n+Ba_{n-1}+Ca_{n-2}+Da_{n-3}=0$; $n>2$.

Важное средство для разложения функций в ряд дают формулы Тэйлора и Маклорена. Формула Тэйлора может быть записана в таком виде:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+$$
$$+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(x-a)^{n-1}+R_n.$$

Здесь R_n — остаточный член, применяемый в двух видах:

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{1\cdot 2\ldots n}(x-a)^n \qquad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(x-c)^{n-1}(x-a) \qquad \text{(форма Коши)}.$$

В обоих случаях c означает некоторое среднее между числами a и x. Функция $f(x)$ предполагается имеющей в интервале между a и x производную n-го порядка.

Формула Маклорена получается из формулы Тэйлора при $a=0$ и имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}x^{n-1}+R_n.$$

При этом

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{1\cdot 2\ldots n}x^n \qquad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}x(x-c)^{n-1} \qquad \text{(форма Коши)}.$$

Здесь c — некоторое среднее между числами 0 и x.

В формулах Тэйлора и Маклорена величина n может выбираться произвольно, если $f(x)$ имеет производные нужного порядка во всех точках интервала (a, x).

Если $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, то из этих формул получаются ряды Тэйлора и Маклорена, имеющие вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Сходимость этих рядов следует из условия: $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, но не обратно.

Следует заметить, что исследование условий, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, удается лишь в сравнительно простых случаях. По счастью, теория функций комплексного переменного дает простое решение вопроса о законности рядов Тэйлора и Маклорена для широкого класса функций.

Следующие пять разложений получаются из ряда Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Первые три из них справедливы при всяком значении x. Два последних справедливы при $|x| < 1$. При $|x| > 1$ последнее лишено смысла, так как ряд расходится. Формула для $(1+x)^m$, называемая биномом Ньютона, при $|x| > 1$ справедлива лишь тогда, когда m — целое положительное или нуль. К указанным пяти рядам по простоте и важности можно присоединить шестой ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Непосредственное получение его из ряда Маклорена несколько затруднительно, и другие приемы ведут к цели легче. Один из них покажем на примере функции $y = \arcsin x$. Дифференцируя это равенство и освобождаясь от знаменателя, получаем: $\sqrt{1-x^2}\,y' = 1$. Беря еще раз производную и опять освобождаясь от знаменателя, приходим к равенству:

$$(1-x^2)\,y'' - xy' = 0. \qquad (*)$$

Оно представляет так называемое дифференциальное уравнение для функции $y = \arcsin x$. Предполагая, что разложение y по степеням x существует, напишем:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Так как для степенных рядов допустимо почленное дифференцирование, то отсюда следуют равенства:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (*), получаем:

$$(1 - x^2) \sum n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum n a_n x^{n-1} = 0.$$

Группируя члены по степеням x, что тоже для степенных рядов законно, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось, необходимо должно быть

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_{n+2} = \frac{n^2 a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Исходя отсюда, можно найти все a_n, если знать a_0 и a_1. Но разложение $\arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ должно совпадать с рядом Маклорена для $\arcsin x$. Поэтому a_0 и a_1 равны значениям $\arcsin x$ и $(\arcsin x)'$ при $x = 0$, т. е. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Отсюда следуют равенства:

$$a_2 = 0, \ a_4 = 0, \ a_6 = 0, \ldots,$$

$$a_3 = \frac{1^2 a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{3^2 a_3}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5},$$

$$a_7 = \frac{5^2 a_5}{6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, \ldots$$

Таким образом, если $\arcsin x$ разлагается в ряд по степеням x, то должно быть:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

По признаку Даламбера ряд сходится при $|x| < 1$. То, что $\arcsin x$ действительно разлагается в ряд, с легкостью дает теория функций комплексного переменного.

1651. Разложить по степеням $x - 2$ полином $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

1652. Разложить по степеням $x + 1$ полином $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

1653. Доказать равенства:

$$\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$

$$\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$$

разложив левые части по степеням x.

1654. В разложении для $\ln(1+x)$ заменить x на $-x$ и, исходя из рядов для $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$, получить ряд Грегори:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right];\quad |x|<1.$$

1655. Получить равенство:

$$\ln(N+1)-\ln N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right];\quad N>0.$$

1656. Из ряда для e^x получить разложение для e^{-x}, а также разложения:

$$\operatorname{ch}x\equiv\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\operatorname{sh}x\equiv\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,$$

годные при всяком x.

Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

найти следующие суммы:

1657. $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos(n-1)x$.

1658. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x$.

1659. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$.

1660. $\sin x-\sin 2x+\ldots-\sin 2nx$.

1661. $\sin^2 x-\sin^2 3x+\sin^2 5x-\ldots+(-1)^{n-1}\sin^2(2n-1)x$.

1662. $x\sin a+x^2\sin 2a+\ldots+x^{n-1}\sin(n-1)x$.

Доказать равенства:

1663. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}+2\cos x\right)$.

1664. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{1}{3}\left(e^x+2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

1665. $\displaystyle e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$.

Здесь, как и в других случаях, считается, что $0!=1$.

1666. $\displaystyle\operatorname{ch}x\cdot\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{4n}}{(4n)!}$.

1667. $e^{x \operatorname{ctg} a} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{\sin^n a} \cdot \frac{x^n}{n!}$.

1668. $(1+x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arctg} x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{m(m-1)\ldots(m-2\nu)}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}$;

$|x| < 1$.

1669. $(1+x^2)^{-\frac{m}{2}} \cos(m \operatorname{arctg} x) =$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{m(m+1)\ldots(m+2\nu-1)}{(2\nu)!} x^{2\nu}; \quad |x| < 1.$$

1670. Применив формулу Лагранжа к $\varphi(x) - \varphi(\pi)$, где

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}},$$

доказать, что при $0 < x < 2\pi$ имеет место равенство

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots = \frac{\pi - x}{2}.$$

1671. Применив формулу Лагранжа к $\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, где

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\cos 2nx}{4n \sin x},$$

доказать, что при $0 < x < \pi$ имеет место равенство

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

1672. Пользуясь биномом Ньютона, получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots; \quad |x| < 1.$$

1673. Доказать, что при $|x| < 1$ справедливы равенства:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n.$$

1674. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^4}{a^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^6}{a^7}+\ldots;\quad |x|<a.$$

1675. Доказать равенство:

$$(a+x)^n=a^n+nxa^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2a^{n-2}+\ldots;\quad |x|<a.$$

Разложить по степеням x следующие функции:

1676. $\sqrt{1+x}.$

1677. $\ln\frac{a+x}{a-x}.$

1678. $\ln(1-x+x^2).$

1679. $\ln(2-3x+x^2).$

1680. $\frac{(1+x)^2}{x}\ln(1+x).$

1681. $\ln(1-2x\cos\varphi+x^2)=-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}x^n;\quad |x|<1.$

Проверить, что

1682. $\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx;\quad |a|<1.$

1683. $\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx;\quad |a|<1.$

С помощью подходящей замены переменной получить следующие разложения в ряды:

1684. $\ln\frac{x+1}{x-1}=2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right];\quad |x|>1.$

1685. $\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right];\quad x>0.$

1686. $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^3+\ldots;$

$$x>-\frac{1}{2}.$$

Получить следующие разложения в ряды:

1687. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

$$|x|<1.$$

1688. $\ln\frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^2}{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^3}{6}+$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^4}{8}+\ldots;\quad |x|<1.$$

§ 7. Ряды и действия с ними

1689. Найти сумму ряда $s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, воспользовавшись равенством:

$$\begin{aligned} s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \\ x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \\ x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \\ x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \\ x^4 + x^5 + \ldots \\ x^5 + \ldots \end{aligned}$$

1690. Найти сумму ряда $s = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$, составив произведения xs и x^2s.

1691. Заметив, что коэффициенты ряда

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \ldots$$

связаны соотношением: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, где a_n — коэффициент при x^n, найти сумму ряда умножением ее на $1 - 2x + x^2$.

1692. У ряда

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \ldots$$

каждый следующий коэффициент равен сумме трех предыдущих. Найти сумму ряда.

1693. Перемножить два ряда:

$$s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \quad \text{и} \quad s_1 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

1694. Непосредственным умножением доказать, что

$$(1 + x)\, s_m(x) = s_{m+1}(x),$$

где $s_m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$

1695. Перемножением рядов доказать равенство:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{1\cdot 2} + \frac{(x+y)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

1696. Доказать равенства:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \ldots; \quad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{2x(1-x^2)}\ln\frac{1+x}{1-x} = 1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^2 +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^4 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)x^6 + \ldots; \quad |x| < 1.$$

1697. Непосредственным суммированием найти S_n и проверить, что при $|x| < 1$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \frac{8x^8}{1+x^8} + \ldots = \frac{x}{1-x},$$

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \frac{x^8}{1-x^{16}} + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

1698. Для ряда Моргана

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^4} \cdot \frac{x^4}{1+x^8} + \ldots$$

можно (при $|x| \neq 1$) получить

$$S_n = x\,\frac{1-x^{2^{n+1}-2}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

и потому ряд всегда сходится, но

$$S = \begin{cases} x, \text{ если } |x| \leqslant 1. \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти прямым дифференцированием производные от рядов:

1699. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots;\quad |x| < 1.$

1700. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots;\quad |x| < 1.$

1701. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots;$

1702. $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$

1703. Проверить, что

$$\lim_{n \to \infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \ldots \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

и отсюда получить:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8} + \ldots = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$$

и

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

1704. Доказать, что сумма гипергеометрического ряда Гаусса

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

$$|x| < 1,$$

удовлетворяет уравнению:

$$x(x-1)y'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)x]y' + \alpha\beta y = 0,$$

где

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

1705. Функция Бесселя $J_0(x)$ определяется рядом

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$$

Доказать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

1706. Доказать, что

$$y = 1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \ldots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + xy = 0.$$

Составив для соответствующей функции дифференциальное уравнение, доказать следующие разложения в ряды ($|x| < 1$):

1707. $\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^2 = \frac{1}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{4} - \ldots$

1708. $\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = 1 - \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{2} + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^4}{3} - \ldots$

1709. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times$
$\times\frac{x^5}{5} + \ldots$

1710. $\sin(\mu\arcsin x) =$
$= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-1)}{3!}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{5!}x^5 - \ldots.$

1711. $\cos(\mu\arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!}x^4 - \ldots.$

1712. $\cos(\mu\arccos x) = A\sin\frac{\mu\pi}{2} + B\cos\frac{\mu\pi}{2}$, где A и B ряды двух предыдущих задач.

1713. $e^{m \arcsin x} =$

$$= 1 + mx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(m^2+1^2)(m^2+3^2)\ldots(m^2+(2\nu-1)^2)}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2)\ldots(m^2+4\nu^2)}{(2\nu+2)!} x^{2\nu+2}.$$

1714. Из предыдущей задачи получить

$$\arcsin x = 2 \sum_{0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot (2n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1};$$

$$(\arcsin x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

1715. Разложив двумя способами e^{e^x}, проверить, что

$$\frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \ldots = 5e,$$

$$\frac{1^4}{1} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \ldots = 15e.$$

1716. Замечая, что $\sec x$ — четная функция, можем заключить, что разложение $\sec x$ имеет вид:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

где E_n — соответствующие коэффициенты (числа Эйлера). Умножая почленно на равенство

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m},$$

получить рекуррентную формулу для чисел Эйлера:

$$\frac{E_n}{(2n)!} - \frac{E_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{E_{n-2}}{4!(2n-4)!} - \ldots = 0.$$

Так как $E_0 = 1$, то из этой формулы следует, что

$$E_1 = 1, \; E_2 = 5, \; E_3 = 61, \; E_4 = 1385, \ldots$$

1717. $1 - \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sum \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$, где B_n — коэффициенты (называемые числами Бернулли). Доказать, что для чисел Бернулли существует рекуррентная формула:

$$\frac{B_n}{2(2n)!}-\frac{B_{n-1}}{2^3 3!(2n-2)!}+\frac{B_{n-2}}{2^5\cdot 5!(2n-4)!}-\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}B_1}{2^{2n-1}(2n-1)!2!}+\frac{(-1)^n 2n}{2^{2n+1}(2n+1)!}=0.$$

Из этой формулы следует, что

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ldots$$

Написать первые пять членов разложения по степеням x для следующих функций:

1718. $\ln(1+e^x)$. **1719.** $e^{\sin x}$.

1720. $(1+x)^x$. **1721.** $\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$.

1722. Доказать, что при малости величины $\frac{b}{a^2}$ приближенное равенство $\sqrt{a^2+b}\cong a+\frac{b}{2a}$ имеет погрешность, приблизительно равную $\frac{a}{8}\left(\frac{b}{a^2}\right)^2$, и вычислить с помощью этого равенства значения радикалов:

a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{24}$, c) $\sqrt{84}$, d) $\sqrt{235}$, e) $\sqrt{240}$.

1723. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n+x}\cong a+\frac{x}{na^{n-1}}$$

и вычислить с ее помощью корни:

$$\sqrt[5]{245},\quad \sqrt[7]{129},\quad \sqrt[9]{515},\quad \sqrt[10]{1027}.$$

1724. Существует следующая приближенная формула для извлечения корней:

$$\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+b}\cong a+\frac{2ab}{2nN-(n+1)b},$$

где a^n — точная степень, близкая к N. Доказать, что погрешность этой формулы приближенно равна $\frac{n^2-1}{12n^3}\left(\frac{b}{a^n}\right)^3$.

1725. Вычислить по предыдущей формуле следующие корни:

a) $\sqrt[3]{30}$, b) $\sqrt[3]{70}$, c) $\sqrt[3]{500}$, d) $\sqrt[5]{250}$, e) $\sqrt{60}$, f) $\sqrt{84}$.

1726. Воспользовавшись биномом Ньютона и равенством

$$\sqrt[3]{2}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{128}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}},$$

вычислить с 10 знаками величину $\sqrt[3]{2}$.

1727. С помощью бинома Ньютона и тождества

$$\sqrt{2}=\frac{1}{5}\sqrt{50}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$

вычислить $\sqrt{2}$ с 10 знаками.

1728. С помощью ряда для $\ln(1+x)$ при $x=-\frac{1}{10}, -\frac{1}{25}$ и $\frac{1}{80}$, а также тождеств

$$\ln\frac{9}{10}=2\ln 3-\ln 2-\ln 5,\quad \ln\frac{24}{25}=3\ln 2+\ln 3-2\ln 5,$$

$$\ln\frac{81}{80}=4\ln 3-4\ln 2-\ln 5$$

вычислить натуральные логарифмы чисел 2, 3, 5 и 10 с 10 знаками после запятой.

1729. Доказать, что величины

$$\Delta\ln n=\ln(n+1)-\ln n,\quad \Delta^2\ln n=\ln(n+2)-2\ln(n+1)+\ln n,$$

$$\Delta^3\ln n=\ln(n+3)-3\ln(n+2)+3\ln(n+1)-\ln n$$

имеют соответственно следующие разложения в ряды:

$$\Delta\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right],$$

$$\Delta^2\ln n=-\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2(n+1)^4}+\frac{1}{3(n+1)^6}+\ldots\right],$$

$$\Delta^3\ln n=2\left[\frac{8}{(2n+3)^3}+\frac{48}{(2n+3)^5}+\frac{312}{(2n+3)^7}+\ldots\right].$$

1730. Доказать, что табличная разность обыкновенных пятизначных логарифмов чисел, т. е. $\lg(n+1)-\lg n$, при $1000<n<10\,000$ приближенно выражается формулой $\Delta=10^5\cdot\frac{M}{n}=\frac{43\,429}{n}$; $M=0{,}43429$ — логарифмический модуль, Δ выражена в стотысячных долях.

1731. Доказать, что табличная разность логарифмов синусов, данных через одну минуту, выраженная в стотысячных долях, может быть дана приближенной формулой

$$\Delta\lg\sin x\cong 12{,}6\operatorname{ctg}x.$$

1732. Доказать, что формулы того же рода для синусов и для логарифмов тангенсов имеют вид:

$$\Delta \sin x = 29{,}1 \cos x, \quad \Delta \lg \operatorname{tg} x = \frac{25{,}2}{\sin 2x}.$$

Несколько следующих задач основано на приближенных равенствах $\sin x \cong x$, $\operatorname{tg} x \cong x$, обладающих высокой точностью для малых углов. В некоторых из этих задач нужно воспользоваться более точными формулами:

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{6}; \qquad \operatorname{tg} x \cong x + \frac{x^3}{3}.$$

1733. Под каким углом зрения виден за 10 *км* диаметр фабричной трубы с радиусом 2*м*?

1734. Диск Солнца виден под углом 30′. Во сколько раз расстояние до Солнца больше диаметра Солнца?

1735. Полотно железной дороги имеет уклон 0,012. Какой угол с горизонталью оно составляет?

1736. За сутки земной шар пробегает приблизительно дугу в 1° своей орбиты, диаметр которой $150 \cdot 10^6$. Определить, на сколько отклоняется от прямой линии путь Земли за 1 секунду (27 *км*) и за 1 минуту?

1737. Дуга 1° земного меридиана имеет около 112 *км*. На сколько она длиннее своей хорды?

1738. Доказать приближенную формулу: $l = \sqrt{13h}$, где h — высота наблюдателя над горизонтом в метрах, а l — дальность до горизонта в километрах.

1739. При измерении расстояния между точками отсчет на протянутой ленте показал 12 *м*. Зная, что провес ленты был 20 *см*, и считая форму ленты дугой круга, определить расстояние между точками с поправкой на провес.

В следующих задачах вычислить с помощью рядов величины с указанной точностью:

1740. Найти $\sin 1°$ с точностью до 10^{-5}.

1741. Найти $\cos 1°$ с точностью до 10^{-5}.

1742. Найти $\sin 10°$ с точностью до 10^{-4}.

1743. Вычислить π с точностью до 10^{-10} с помощью тождества $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$.

1744. Шенкс вычислил π с 707 знаками с помощью тождества предыдущей задачи. Сколько членов в разложениях $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ он должен был удерживать?

1745. Одно из правил Гюйгенса для вычисления длины окружности эквивалентно равенству:

$$2\pi = \frac{P_n + 2p_n}{3r},$$

где P_n и p_n — периметры описанного и вписанного правильных многоугольников, r — радиус круга. Доказать, что погрешность этого равенства приближенно равна $\frac{30}{n^4}$.

§ 8. Раскрытие неопределенностей

Решение ближайших задач удобно находится с помощью теоремы, которую не совсем точно называют правилом Лопиталя. В силу ее, если при x, стремящемся к конечному или бесконечному пределу, числитель и знаменатель дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ одновременно стремятся к нулю или же к бесконечности, то

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

При этом предполагается, что предел в правой части существует.

Найти пределы следующих выражений:

1746. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^m-1+x^2}$. **1747.** $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

1748. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$. **1749.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$.

1750. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **1751.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

1752. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$. **1753.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^m}{e^{ax}}$; $a>0$.

1754. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. **1755.** $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

1756. $\lim\limits_{x\to a} \arcsin(x-a)\operatorname{ctg}(x-a)$.

1757. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$; $m>0$. **1758.** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^m}$; $m>0$.

Применяя разложение в ряды, найти пределы, указанные в следующих задачах:

1759. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$. **1760.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$.

1761. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. **1762.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

1763. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$.

1764. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$. **1765.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{\cos x}}{1-\sin x-\cos x}$.

1766. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$.

1767. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

1768. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}$.

В следующих задачах пределы находятся разными приемами:

1769. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+\sin x}$.

1770. $\lim\limits_{x \to 1} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

1771. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + x^3 \sin \frac{\pi}{x}}{x}$.

1772. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

1773. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{m+nx^2}}$; $b>0$, $n>0$.

1774. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^2}$.

1775. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

1776. $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

1777. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[1 - x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

1778. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x}\right)$.

1779. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

1780. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\sqrt{\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right]$.

1781. Найти предел отношения площади сегмента круга к площади треугольника, образованного хордой и касательными в концах дуги, при условии, что дуга сегмента стремится к нулю.

1782. Такой же вопрос по отношению к сегменту и треугольнику, составленному хордой и двумя хордами, соединяющими ее концы с серединой дуги.

1783. Если a, b, c — стороны сферического треугольника, A, B, C — противолежащие углы, то

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Во что переходит эта формула, если a, b и c малы?

1784. Тело падает в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Путь, пройденный за t секунд, выражается формулой

$$s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2 g}{a^2}\left(1 - e^{-\frac{at}{m}}\right),$$

где m — масса, a — коэффициент трения. Найти приближенные формулы для s, если $\frac{at}{m}$ велико, а также для случая, если $\frac{at}{m}$ весьма мало.

§ 9. Экстремальные значения функций нескольких переменных

Наибольшие и наименьшие значения функций от двух переменных, имеющих в данной области частные производные нужных порядков, находятся с помощью следующих теорем:

1. Для того чтобы функция $f(x, y)$ имела экстремальное значение в некоторой точке (x, y), необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Для того чтобы $f(x, y)$ в некоторой точке (x, y) имела экстремальное значение, достаточно, чтобы величина $rt - s^2$ была положительна, а величины p и q равны нулю. Если при этом r и $t > 0$, то величина $f(x, y)$ имеет минимальное значение, если же r и $t < 0$, то $f(x, y)$ имеет максимальное значение. Здесь приняты для краткости обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Для функций нескольких независимых переменных существуют подобные же, но несколько более сложные критерии.

3. Для того чтобы функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела в некоторой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ экстремальное значение, необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

При этом предполагается, что во всех точках области функция имеет все нужные производные.

4. Для того чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела в некоторой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ экстремальное значение, достаточно выполнение следующих условий:

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0;$

b) все главные миноры четного порядка у определителя

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны, а знак у главных миноров нечетного порядка одинаков со знаком p_{11}. При этом для краткости положено:

$$p_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu\, \partial x_\mu}.$$

Если при этих условиях $p_{11} > 0$, то функция имеет минимум. Если же $p_{11} < 0$, то функция имеет максимум.

Найти экстремальные значения следующих функций, заданных в явном виде:

1785. $z = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by$.

1786. $z = x^3 y^2 (a - x - y)$.

1787. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

1788. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

1789. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$; $x > 0$, $y > 0$.

1790. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

1791. $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$.

1792. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$; $a > 3$.

1793. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$; $a > 1$.

1794. $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2)$; $a > 0$, $b > 0$.

1795. $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$. **1796.** $z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

1797. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1798. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

1799. $z = \cos x \cos y \cos(x+y)$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

1800. $z = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2$.

1801. $z = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha \cos(y - \beta)$.

1802. $u = xyz(4a - x - y - z)$.

1803. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.

1804. $u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$; $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

1805. $u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$; $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

1806. $u = (ax + by + cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

1807. Задача Гюйгенса: между положительными числами a и b вставить n других чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы величина дроби

$$u = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

получила наибольшее значение.

В следующих задачах требуется найти наибольшее и наименьшее значения функций z, заданных неявно, как функции от x и y.

1808. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

1809. $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$.

1810. $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0$.

1811. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

1812. $x^3y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^2 - 3z - 14 = 0$.

1813. $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Дальнейшие примеры содержат вопросы о нахождении относительных экстремальных значений, т. е. о нахождении экстремальных значений функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, переменные которой связаны несколькими уравнениями $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где функции $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ имеют первые и вторые частные производные во всей области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $m < n$.

При отыскании экстремальных значений здесь удобен способ Лагранжа. Он заключается в том, что составляют вспомогательную функцию

$$\Phi = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — неопределенные постоянные множители. После этого пишем ряд уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Из них, а также и из уравнений $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$, можно найти значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а также и величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых $u = f$ получает экстремальное значение при соблюдении условий $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$, находятся среди полученных по способу Лагранжа.

Критерий, дающий возможность узнать, достигается ли экстремальное значение f, и какое именно, при величинах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученных по способу Лагранжа, сравнительно сложен и здесь не приводится.

Найти наибольшие и наименьшие значения следующих функций переменных, связанных указанными условиями:

1814. $u = x + y$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

1815. $u = x^m + y^m$; $x + y = 2a$; $a > 0$, $m > 1$.

1816. $u = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na$; $a > 0$, $m > 1$.

1817. $u = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na$; $a > 0$, $m < 1$.

1818. $u = xy$; $x^2 + y^2 = 1$.

1819. $u = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

1820. $u = x + y + z$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 1$; $a > 0$, $b > 0, c > 0$.

1821. $u = x^2y^3z^4$; $2x + 3y + 4z = a$.

1822. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + 2y + 3z = 0$.

1823. $u = xyz$; $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

1824. $u = x^2 + y^2 + z^2$; $lx + my + nz = 0$, $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$.

1825. $u = \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2}$; $x + y + z = \pi$; $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

1826. $u = x - y$; $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{tg} y$; $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

1827. $u = \dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}$; $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \ldots + \beta_nx_n = p$, все α и β положительны, так же как и числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1828. $u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1829. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $lx + my + nz = 0$.

1830. Неравенство Адамара для определителя третьего порядка

$$u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

имеет вид:

$|u| \leqslant 1$, если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$.

Доказать это неравенство.

1831. Неравенства Маклорена: если $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na$, то

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_nx_{n-1} \leqslant \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3, \text{ и т. д.}$$

Доказать эти неравенства.

1832. Задачу Гюйгенса (см. задачу 1807) можно свести к доказательству неравенства:

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \geqslant (1 + q)^n; \quad u_k > 0,$$

если $u_1u_2 \ldots u_n = q^n$. Доказать это неравенство.

В заключение приводится ряд задач на нахождение наибольших и наименьших величин, которые могут быть решены как изложенными методами, так и другими.

1833. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ найти треугольник с наибольшей площадью.

1834. Найти наибольшую площадь треугольника с данными основанием a и углом при вершине A.

1835. Данный треугольник разделить на две равновеликие части прямою наименьшей длины.

1836. Доказать, что в треугольнике радиус вписанного круга не больше, чем половина радиуса описанного круга.

1837. В данный треугольник вписать треугольник с наименьшим периметром.

1838. В данный квадрат вписать четырехугольник с наименьшим периметром.

1839. Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой до вершин была бы наименьшей.

1840. Найти точку, сумма квадратов расстояний которой до данных точек была бы наименьшей.

1841. Найти наибольшую площадь четырехугольника с данными сторонами a, b, c, d.

1842. Найти многоугольник с наибольшей площадью и с данными сторонами a, b, c, ..., l.

1843. Найти наибольшую площадь многоугольника с n сторонами, вписанного в круг радиуса a.

1844. Найти наименьшую площадь многоугольника с n сторонами, описанного около круга радиуса a.

1845. В данный круг вписать треугольник, сумма квадратов сторон которого была бы наибольшей.

1846. В данный круг вписать наибольший по площади четырехугольник с данным углом α.

1847. На плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

1848. Из всех плоскостей, проходящих через данную точку, найти наиболее удаленную от начала координат.

1849. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

1850. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме его ребер $12a$.

1851. Найти наибольший объем прямоугольного параллелепипеда с данной полной поверхностью $6a^2$.

1852. Около прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a$, $2b$ и $2c$ описать наименьший по объему эллипсоид.

1853. Через точку (a, b, c) провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

1854. Определить размеры прямоугольного открытого сверху ящика так, чтобы при данных объеме V и толщине стенок h на него пошло наименьшее количество материала.

1855. Определить размеры цилиндрического сосуда с данной поверхностью и наибольшим объемом.

1856. В данный конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема,

1857. Какой из конусов с данной боковой поверхностью S имеет наибольший объем.

1858. Найти наибольший по объему сосуд формы усеченного конуса с данными основанием и образующей: $l=4r$.

1859. На эллипсе даны две точки. Где на том же эллипсе поместить третью так, чтобы получившийся треугольник имел наибольшую площадь?

1860. Найти кратчайшее расстояние точки $(p, 4p)$ до параболы $y^2=2px$.

1861. В заданный равнобедренный треугольник вписать параболический сегмент с общей осью и наибольшей площадью. Площадь сегмента параболы равна произведению $\frac{2}{3}$ основания на высоту.

1862. В данный эллипс вписать равнобедренный треугольник наибольшей площади с основанием, параллельным оси.

1863. На эллипсе найти точку, наиболее близкую к данной точке большой оси $(m, 0)$.

1864. Около эллипса описать треугольник наименьшей площади с основанием, параллельным оси.

1865. Найти нормаль эллипса, наиболее удаленную от центра.

1866. Найти нормаль к эллипсу с полуосями a и b, отрезок которой внутри эллипса имел бы наименьшую длину.

1867. Провести к эллипсу касательную, отрезок которой между осями имеет наименьшую длину.

1868. Найти площадь S эллипса, полученного при сечении эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостью $lx+my+nz=0$.

1869. Провести к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ касательную плоскость с наименьшей суммой отрезков на осях.

1870. Доказать, что из хорд, параллельных оси Oz и заключенных между плоскостью $z=ax+bx+c$ и эллиптическим параболоидом $z=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$, максимальная проходит через центр плоского сечения.

1871. В сегмент эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, вырезанный плоскостью $z=h$, вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшим объемом.

1872. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ провести касательную плоскость так, чтобы центр тяжести треугольника, выделяемого на этой плоскости плоскостями координат, был наименее удален от начала.

1873. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ провести касательную плоскость, образующую с его плоскостями симметрии тетраэдр наименьшего объема.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Уравнения кривых и их виды

1874. На горизонтальную ось насажен плоский диск-эксцентрик. Какую форму он должен иметь, чтобы упирающийся в него вертикальный стержень совершал гармоническое колебательное движение при равномерном вращении оси?

1875. Тот же вопрос, но вертикальный стержень должен совершать равномерное движение вверх и вниз. (Так движется трубка у некоторых микроскопов.)

1876. Косо срезанный цилиндр покрыт красящим веществом и катится по плоскости. Какой кривой ограничена окрашенная часть плоскости?

1877. Доказать, что кривые $r = e^{a\varphi}$ и $r = ce^{a\varphi}$ геометрически подобны — одна переходит в другую при увеличении масштаба рисунка. В то же время они равны, переходя друг в друга при повороте на некоторый угол.

1878. Доказать, что фигуры, заключенные между осью x и кривыми $y = e^x$ и $y = ae^x$, при передвижении одной из этих кривых вдоль оси x могут быть совмещены.

1879. Прямая данной длины l скользит концами A и B по осям Ox и Oy. Из вершины C прямоугольника $OACB$ на прямую опускается перпендикуляр. Найти геометрическое место основания этого перпендикуляра.

1880. Тот же вопрос для конца перпендикуляра, опущенного из начала координат. (Четырехлепестник.)

1881. Дан отрезок $OO_1 = a$. На произвольный луч, проходящий через точку O, опущен из точки O_1 перпендикуляр O_1M_1, а из основания этого перпендикуляра M_1 опущен перпендикуляр M_1M на луч, симметричный с первым относительно линии OO_1. Найти геометрическое место оснований второго перпендикуляра M.

1882. Из точки $M(\xi, y)$ окружности $x^2 + y^2 = a^2$ проводится прямая $y = \eta$ до пересечения с осью ординат в точке N. Из точки $(a, 0)$ проводится прямая в точку N. Найти геометрическое место точки ее пересечения с ординатой точки M.

1883. Прямой угол вращается около вершины $A(a, 0)$. Из начала координат через точку пересечения одной из сторон угла с окружностью $x^2+y^2=r^2$ проводится прямая до пересечения с другой стороной угла. Найти геометрическое место точки пересечения.

1884. Прямоугольный треугольник имеет катеты $AC=a$ и $BC=2a$. Точка B скользит по оси Ox, а точка A скользит по окружности $x^2+y^2=a^2$. Найти геометрическое место вершин прямого угла.

1885. Найти геометрическое место точек касания прямых из начала координат, касательных к окружностям с радиусом a и с центром на оси Ox.

1886. Две равные параболы вращаются около своих вершин так, что четыре точки их пересечения всегда лежат на окружности. Найти геометрическое место центра окружности.

1887. Найти геометрическое место вершины равнобочной гиперболы с данным центром, проходящей через данную точку.

1888. Тот же вопрос для фокуса гиперболы.

1889. Гипербола с полуосью a проходит через данные две точки с расстоянием $2c$. Найти геометрическое место центра гиперболы, если она равнобочная.

1890. Найти геометрическое место середин отрезков нормалей к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключенных внутри эллипса.

1891. Два стержня длиной $\sqrt{2}$ вращаются вокруг своих концов, закрепленных в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Другие концы их соединены шарнирно стержнем длиной 2. Определить, какую кривую описывает середина соединительного стержня.

1892. Инверсор Поселлье — Липкина состоит из ромба $ABCD$ со стороной, равной a. Точки A и C соединены с неподвижной точкой O прямыми OA и OC длиной b, где $b>a$.

Стороны ромба и отрезки OA и OC — стержни, соединенные шарнирами. Доказать, что точки O, B и D лежат на одной прямой и притом $OB\cdot OD=b^2-a^2$, так что движение вершины ромба по данной кривой позволяет выполнить инверсию.

1893. Доказать, что при движении точки B в инверсоре Поселлье — Липкина по окружности, проходящей через точку O, точка D описывает прямую.

Какие линии изображаются параметрическими уравнениями:

1894. $x=t^2-t+1$, $y=t^2+t+1$.

1895. $x=t^2-2t+3$, $y=t^2-2t+1$.

1896. $x=a\sin^2 t$, $y=b\cos^2 t$.

1897. $x=a\sin^4 t$, $y=a\cos^4 t$.

1898. На кривой $x=t^2-2t+3$, $y=t^2+2t-1$ найти самую левую и самую низкую точки.

1899. Воспользовавшись тождеством $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, представить уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в параметрической форме.

1900. Воспользовавшись тождеством $e^{-t} \cdot e^{t} = 1$, представить уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в параметрической форме.

1901. Представить уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в параметрической форме, приняв за параметр угловой коэффициент хорды окружности, проходящей через точку $(-a, 0)$.

1902. Доказать, что координаты точек кривой 2-го порядка можно рационально выразить через угловой коэффициент переменной хорды кривой, проходящей через какую-нибудь выбранную точку кривой.

1903. Кривая $F(x, y) = 0$, координаты точек которой можно рационально выразить через параметр, называется уникурсальной. Доказать, что кривые $r = f(\cos\varphi, \sin\varphi)$, где f — рациональная функция, уникурсальны.

1904. Доказать, что циссоида $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ уникурсальна, выразив координаты ее точек через угловой коэффициент хорды, соединяющей начало с данной точкой кривой.

1905. Решая совместно уравнение декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ и уравнение вспомогательной прямой $y = tx$, получить параметрические уравнения декартова листа:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

1906. Доказать, что три точки декартова листа, соответствующие значениям параметра t_1, t_2 и t_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 t_3 = -1$. Точки различные.

1907. Доказать, что координаты точек кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ могут быть выражены через некоторый параметр t формулами:

$$x = \frac{2a(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{4at}{(1 + t^2)^2}.$$

1908. При каком условии три точки кардиоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3 (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

1909. Доказать, что координаты точек строфоиды $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$ можно выразить рационально через некоторый параметр t по формулам:

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at(t^2 - 1)}{1 + t^2}.$$

1910. При каком условии точки строфоиды, соответствующие значениям t_1, t_2, t_3 параметра (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

1911. При каких значениях t_1, t_2, t_3, t_4 соответствующие точки строфоиды (см. задачу 1909) лежат на одной окружности?

1912. Доказать, что четыре точки циссоиды $x=\frac{a}{t^2+1}$, $y=\frac{a}{t(t^2+1)}$, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3 и t_4, лежат на одной окружности при условии $t_1+t_2+t_3+t_4=0$.

1913. Выразить рационально через вспомогательный параметр координаты точек лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

1914. Показать, что кривая $x^y=y^x$ распадается на биссектрису первого координатного угла и кривую

$$x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где n — переменный параметр.

§ 2. Касательная и нормаль

1915. Показать, что кривые

$$y=a\sin\frac{x}{a}, \quad y=a\operatorname{tg}\frac{x}{a}, \quad y=a\ln\frac{x}{a}$$

пересекают ось Ox под одинаковыми углами, независимо от величины a.

1916. Найти угол, под которым кривая

$$y=\frac{x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

пересекает ось Oy.

1917. При каком значении a кривая $y=\frac{x^3+ax}{b}$ пересекает ось Oy под углом 45°?

1918. Тот же вопрос для кривой $y=\frac{ax}{1+bx^2}$.

1919. Какая из прямых, идущих из начала координат, пересекает гиперболу $xy=a^2$ под прямым углом?

1920. Тот же вопрос для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1921. Найти уравнение синусоиды, пересекающей ось Ox в начале координат под углом 45°, а в точке $(a, 0)$ — под углом 135°.

1922. Доказать, что угол между радиусом-вектором, проведенным из начала координат в точку (r, φ) кривой $r^n=a^n\cos n\varphi$, и касательной к этой кривой равен $n\varphi+\frac{\pi}{2}$.

1923. Доказать, что кривая $r=e^{a\varphi}$ пересекает все радиусы-векторы, идущие из начала, под одинаковым углом.

1924. Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда $r=a\varphi$ и радиусом-вектором, проведенным к точке касания из начала, стремится к 90° при $\varphi\to\infty$.

1925. Найти угол между касательной к кардиоиде $r = a(1 + \cos\varphi)$ и радиусом-вектором точки касания.

1926. Найти уравнение касательной к кривой $y = x \ln x + 1$ в точке с ординатой 1.

1927. Найти уравнение касательной к кривой $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.

1928. Провести нормаль к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке, где $y = 3$.

1929. Найти нормаль к локону Марии Аньези $x^2y = a^2(a - y)$, параллельную прямой $y = 2x$.

1930. Найти нормаль к кривой $y = a \ln\cos\frac{x}{a}$ в точке $x = 2\pi a$.

1931. Найти нормаль к кардиоиде $r = a(1 + \cos\varphi)$, составляющую угол 45° с полярной осью.

1932. На кривой $xy^2 = 2a^3$ найти точки, нормаль в которых проходит через начало координат.

1933. У кривой $x^3 - y^3 = 3x^2$ найти касательную, параллельную прямой $y = x$.

1934. Вычислить расстояние от начала координат до касательной к кривой $x^2y = a^3$, проведенной в точке с абсциссой x_0.

1935. Найти наиболее удаленную от начала координат касательную к астроиде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1936. Доказать, что касательные к кривым $y = af(x)$, имеющие общую абсциссу точки касания, пересекаются в одной точке.

1937. Доказать, что в точках с одинаковой абсциссой поднормали к кривым $y = f(x)$ и $y = \sqrt{f^2(x) + a^2}$ одинаковы.

1938. Доказать, что у кривых $y = ax^n$ отношение подкасательной к абсциссе точки касания равно $\frac{1}{n}$.

1939. Доказать, что у кривой $y = a\ln(x^2 - a^2)$ сумма длин касательной и подкасательной пропорциональна величине xy.

1940. Доказать, что длина касательной к трактрисе $\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ равна a.

1941. Доказать, что все нормали к кривой

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

одинаково удалены от начала координат.

1942. Доказать, что отрезок нормали к кривой

$$x = 2a\sin t + a\sin t\cos^2 t, \quad y = -a\cos^3 t,$$

заключенный между осями координат, равен $2a$.

1943. Доказать, что у кривой

$$x = 2a \ln \sin t - 2a \sin^2 t, \quad y = a \sin 2t$$

отрезок оси Ox между касательной и нормалью равен $2a$.

1944. Доказать, что окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и нормали к эпициклоиде

$$x = a\left[(1+\lambda)\cos t - \lambda \cos\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)t\right],$$

$$y = a\left[(1+\lambda)\sin t - \lambda \sin\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)t\right]$$

пересекаются в точке $(a\cos t,\ a\sin t)$.

1945. То же для гипоциклоиды

$$x = a\left[(1-\lambda)\cos t + \lambda \cos\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)t\right],$$

$$y = a\left[(1-\lambda)\sin t + \lambda \sin\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)t\right].$$

1946. Определить длину отрезка касательной к астроиде $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ между осями координат.

1947. Найти отрезок нормали к кривой $x = (a+b)\sin t - a\sin^3 t$, $y = (a-b)\cos t + a\sin^2 t \cos t$, заключенный между осями координат.

1948. Найти расстояние от начала координат касательной к кривой $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

1949. Вычислить расстояние от начала координат касательной к кривой $r = ae^{k\varphi}$.

1950. Вычислить произведение расстояний фокусов эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ от касательной к нему.

1951. Вычислить длину отрезка нормали к эллипсу $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, лежащего внутри этого эллипса.

1952. Нормаль, проведенная в точке M кривой $xy = a^2$, пересекается с прямой $y = x$ в точке N. Найти отношение $OM : MN$.

1953. Доказать, что площадь трапеции, образованной касательной к кривой $3axy = x^3 + 2a^3$, ординатой точки касания и осями координат, не зависит от выбора точки касания.

1954. Доказать, что касательная к кривой $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(1 - \sin t)$ образует вместе с осями координат треугольник, периметр которого постоянен.

1955. Доказать, что касательная к кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ отсекает на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

1956. Доказать, что углы между касательными к кривым $r = f(\varphi)$ и $r = \frac{a}{f(\varphi)}$ и радиусами-векторами при одинаковом значении φ в точках касания составляют в сумме $180°$.

1957. Доказать, что касательные к кривым $y=\frac{\lambda\varphi(x)+\mu\varphi_1(x)}{\lambda+\mu}$ при одинаковых абсциссах точки касания пересекаются в одной точке, положение которой не зависит от λ и μ.

1958. Каждый радиус-вектор кривой $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ пересекает ее в трех точках, отличных от полюса. Доказать, что касательные в этих точках составляют равносторонний треугольник.

1959. В трех точках M_1, M_2, M_3, расположенных на декартовом листе $x^3+y^3=3xy$ на одной прямой, проводятся касательные, пересекающие эту кривую в точках P_1, P_2 и P_3. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.

1960. Из точки M на строфоиде $(2a-x)y^2=x(x-a)^2$ проведены прямые, касающиеся строфоиды в точках P и Q. Доказать, что точки M, P и Q лежат на одной окружности с началом координат. (См. задачи 1909, 1910, 1911.)

1961. У лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ параллельно данному направлению можно провести две пары касательных. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания каждой пары, составляют между собой угол 120°.

1962. Найти длину полярной подкасательной и поднормали у спирали $r^2=a^2\varphi$.

1963. Доказать, что полярные подкасательные у кривых $r=f(\varphi)$ и $r=\frac{af(\varphi)}{a+f(\varphi)}$ в точках, расположенных на одном радиусе-векторе, равны.

1964. Доказать, что у кривых $r=f(\varphi)$ и $r=a+f(\varphi)$ в точках, лежащих на одном радиусе-векторе, полярные поднормали равны.

1965. Найти круг радиуса a, касательный к декартову листу $x^3+y^3-3axy=0$ в точке, где $x=\frac{4a}{3}$, $y=\frac{2}{3}a$.

1966. Провести круг радиуса $3a$, нормальный к циссоиде $x(x^2+y^2)-2ay^2=0$ в точке, где $x=a$.

1967. Найти круг, проходящий через полюс и касательный к спирали Архимеда $r=a\varphi$ при $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Показать, что следующие пары линий пересекаются под прямым углом:

1968. $x^2-y^2=a^2,\quad xy=b^2$.

1969. $y^2=2ux+u^2,\quad y^2=-2vx+v^2$.

1970. $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,\quad \frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}=1;\ a>\mu>b$.

1971. $(2a-x)y^2=x^3,\quad (x^2+y^2)^2=b^2(2x^2+y^2)$.

1972. $b^2x^2+a^2y^2=c,\quad y^b=c_1x^{a^2}$.

1973. $\sin y = ae^{-x}$, $\cos y = be^{-x}$.

1974. $r^n = a^n \cos n\varphi$, $r^n = b^n \sin n\varphi$.

1975. $r^2 = \ln \operatorname{tg} \varphi$, $r^2 \cos 2\varphi + 1 = 0$.

1976. Доказать, что кривые

$$r^2 \cos 2\varphi = a^2, \quad r^2 \cos(2\varphi + \alpha) = b^2$$

пересекаются под углом α.

1977. Доказать, что кривая

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \quad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

пересекает прямую $y = x$ под прямым углом.

1978. Доказать, что окружности

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

пересекаются под прямым углом при соблюдении условия

$$aa_1 + bb_1 = 2(c + c_1).$$

1979. Географическая широта есть угол между нормалью к поверхности Земли в данном месте и плоскостью экватора. Геоцентрическая широта — угол между той же плоскостью и радиусом-вектором из центра Земли в данную точку. Определить наибольшую разность этих широт, считая меридиан Земли эллипсом, у которого $a = 6400$ *км*, $a - b = 21$ *км*.

1980. Кривая $f(x, y) = 0$ называется алгебраической, если $f(x, y)$ — полином относительно x и y. Вводя степени вспомогательного переменного z, можно сделать этот полином однородным. Пусть $f(x, y, z) = 0$ — получившееся уравнение. Доказать, что уравнение касательной к кривой можно написать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z = 0,$$

где (x, y) — точка касания, (X, Y) — точка на касательной, а величины z и Z после нахождения производных заменяются единицей.

Подэрой кривой относительно данной точки называется геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к данной кривой. Найти подэры следующих кривых:

1981. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно центра.

1982. Параболы $y^2 = 2px$ относительно вершины.

1983. Параболы $y^2 = 2px$ относительно фокуса.

1984. Гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ относительно начала координат.

1985. $\left(\frac{x}{a}\right)^n \pm \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ относительно $(0, 0)$.

1986. $r = e^{a\varphi}$ относительно полюса.

1987. $x^2+y^2=2ax$ относительно (0, 0) (ответ дать в полярных координатах).

1988. $r^n=a^n\cos n\varphi$ относительно полюса.

1989. Эвольвенты круга:

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

относительно начала координат.

1990. Доказать, что точки касания касательных, проведенных из данной точки к логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$, лежат на окружности, проходящей через полюс и данную точку.

1991. Из начала координат проведен луч, пересекающий строфоиду $y^2(2a-x)=x(x-a)^2$ в точках M и M_1. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к строфоиде в точках M и M_1.

1992. Из данной точки M к кардиоиде $r=a(1+\cos\varphi)$ можно провести три касательные. Каково геометрическое место точек M, для которых три точки касания лежат на одной прямой?

1993. Каково геометрическое место концов полярной подкасательной у гиперболической спирали $r\varphi=a$?

Найти геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются следующих кривых:

1994. Гиперболы $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

1995. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

1996. Параболы Нейля $4y^3=27ax^2$.

1997. Циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1998. Каково геометрическое место вершин угла данной величины, стороны которого касаются циклоиды?

1999. Из точки M кривой $y^2=ce^{\frac{x}{a}}+4a(x+a)$ проводится нормаль MP до пересечения с осью Ox в точке P. Доказать, что середина MP лежит на параболе $y^2=ax$.

2000. Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к параболе две взаимно перпендикулярные нормали?

2001. При преобразовании обратными радиусами-векторами, или инверсии, точка с полярными координатами r и φ переходит в точку с полярными координатами $\frac{a^2}{r}$ и φ, где a — постоянная. Доказать, что инверсия есть конформное отображение, т. е. что изображения кривых пересекаются под теми же углами, что и сами кривые.

2002. Парабола $y=-ax^2$ катится без скольжения по параболе $y=ax^2$. Найти геометрическое место ее вершины в предположении, что в начальный момент вершины совпадали.

2003. Доказать, что при том же движении параболы ее фокус описывает прямую, а именно директрису неподвижной параболы.

2004. По эллипсу $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ катится без скольжения другой такой же эллипс. В начальном положении их большие оси соприкасались концами. Найти геометрическое место центра катящегося эллипса.

Замечание. При решении последних двух задач полезно обратить внимание на расположение подвижной и неподвижной фигур относительно их общей касательной.

§ 3. Выпуклость, кривизна и радиус кривизны

2005. При каких значениях x кривая $y=x^3+ax+b$ обращена выпуклостью вверх?

2006. Определить направление выпуклости кривой $x(x^2-y^2)+$ $+y^2=0$ в точках, где $x=\frac{3}{2}$.

2007. Исследовать характер вогнутости кривой $x^4=y(x^2-y^2)$ в точках, где $y<0$.

2008. Исследовать характер выпуклости кривой $r\cos^3\varphi=1$ при $-\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{6}$.

2009. Показать, что кривая $x^4+y^4=x^2+y^2$ в точках пересечения с осями обращена к началу координат выпуклой стороной, а в точках пересечения с биссектрисами углов — вогнутой.

2010. Показать, что кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ обращена к началу координат вогнутой стороной, если

$$(x'y''-x''y')(xy'-x'y)>0.$$

2011. Исходя из определения кривизны, найти длину дуги в 1° земного меридиана у полюса и экватора. Меридиан можно считать эллипсом с полуосями $a=6378$ *км* и $b=a-21$ *км* (полярная полуось).

2012. Найти радиус кривизны кривой $3ay^2=2x^3$.

2013. Найти наименьший радиус кривизны у параболы $y^2=2px$.

Найти радиусы кривизны у следующих линий:

2014. $y=x^3$ в точке (1, 1).

2015. $x=t^2$, $y=t^3$ в точке (1, 1).

2016. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ (цепная линия) в точке $(0, a)$.

2017. $y=a\ln\cos\frac{x}{a}$.

2018. $x^n+y^n=2a^n$ в точке (a, a).

2019. $x=a\cos^4 t$; $y=a\sin^4 t$ в точке $(a, 0)$.

2020. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

2021. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

2022. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2023. $r^2=a^2\cos 2\varphi$, при $\varphi=0$.

2024. $\begin{cases} x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}, \\ y = a(3 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}. \end{cases}$ **2025.** $\begin{cases} x = ae^{-t}(\cos t - \sin t), \\ y = ae^{-t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$

2026. $\begin{cases} x = a\,[3t + \sin t \cos t\,(2\cos^2 t + 3)], \\ y = 2a\cos^4 t. \end{cases}$

Найти наибольшую кривизну у кривых:

2027. $y = \ln x$. **2028.** $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ (эллипс).

2029. $y = a\ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. **2030.** $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

2031. Если на нормали от точки кривой отложить в сторону вогнутости кривой величину радиуса кривизны, то найдем центр кривизны. Доказать, что его координаты для кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ выражаются формулами:

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Найти координаты центра кривизны у кривых:

2032. Гиперболы $xy = a^2$ в точке (a, a).

2033. Строфоиды $y^2 = x^2\frac{a + x}{a - x}$.

2034. $y = x\ln x$ в той точке, где $y' = 0$.

2035. $r = a(1 + \cos\varphi)$. **2036.** $r = a\cos^3\varphi$.

2037. Доказать, что для точек спирали Архимеда $r = a\varphi$ при $\varphi \to \infty$ величина разности между радиусом-вектором и радиусом кривизны стремится к нулю.

2038. Доказать, что при тех же условиях центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью $r = a$.

2039. Доказать, что у кривых $r^n = a^n\cos n\varphi$ полярная нормаль в $n + 1$ раз больше радиуса кривизны.

2040. Доказать, что у кривых $r^n = a^n\sin n\varphi$ часть радиуса-вектора, заключенная внутри круга кривизны, равна $\frac{2r}{n+1}$.

2041. Доказать равенство $R = \frac{r\,dr}{dp}$, где R — радиус кривизны, r — радиус-вектор, p — перпендикуляр из полюса на касательную.

2042. Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три такие точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

2043. Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда $r = a\varphi$, лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, размеры которого не зависят от выбора луча.

2044. Найти наименьшее расстояние центра кривизны эллипса от центра эллипса.

2045. Координаты точек кривой можно выразить через длину дуги кривой: $x = x(s)$, $y = y(s)$. Обозначая через Δs малое приращение s, а через Δl — соответствующую хорду, доказать равенство:

$$\Delta l = \Delta s - \frac{1}{24R^2}\Delta s^3 + \ldots,$$

где R — радиус кривизны кривой.

2046. Точка касания принята за начало, касательная — за ось Ox, а ось Oy направлена от точки касания к центру кривизны. Доказать, что в окрестности точки касания, т. е. при малых значениях x, справедливы формулы:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R} + ax^3 + \ldots, \quad y_2 = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \ldots,$$

где R — радиус кривизны в точке (0, 0), y_1 — ордината точек кривой, y_2 — ордината точек круга кривизны.

2047. Найти параболу, соединяющую начало координат O с точкой $B(a+b, 0)$ так, чтобы дуга параболы OB вместе с нижней половиной окружности $(x-a)^2+y^2=b^2$ образовала плавную кривую с непрерывной кривизной.

2048. Найти параболу $y = ax^2 + bx + c$, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, общие касательную и кривизну.

2049. Найти параболу 5-го порядка

$$y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F,$$

которая бы в точках (a, h), $(-a, -h)$ касалась прямых $y = h$ и $y = -h$, имея касание второго порядка.

2050. Доказать, что окружность $(x-3a)^2+(y-3a)^2=8a^2$ и парабола $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{a}$ имеют в точке (a, a) соприкосновение 3-го порядка.

2051. Доказать, что соприкасающийся круг (круг кривизны) с кривой 2-го порядка в вершине кривой имеет соприкосновение 3-го порядка.

2052. Доказать, что для каждой точки, где кривая достаточно гладка, существует кривая 2-го порядка, имеющая с данной кривой в данной точке соприкосновение 4-го порядка.

2053. Доказать, что у циклоиды кривая 2-го порядка с соприкосновением 4-го порядка — всегда эллипс.

2054. Доказать, что у логарифмической спирали кривые 2-го порядка, имеющие с ней соприкосновение 4-го порядка, — эллипсы, большие оси которых образуют постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

2055. Найти геометрическое место фокусов парабол, имеющих в данной точке соприкосновение 2-го порядка с данной кривой.

2056. Найти геометрическое место середин хорд, общих эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и его соприкасающемуся кругу.

2057. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ на хорды, общие эллипсу и его соприкасающемуся кругу.

§ 4. Эволюты кривых

Геометрическое место центров кривизны кривой называется эволютой данной кривой. Уравнение эволюты для кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ получается исключением параметра t из уравнений

$$X-x=-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}, \qquad Y-y=\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}.$$

Найти эволюты следующих кривых:

2058. Параболы $y^2=2px$.

2059. Эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

2060. Гиперболы $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=b\,\mathrm{sh}\,t$.

2061. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

2062. Циссоиды $y^2(2a-x)=x^3$.

2063. Гиперболы $xy=a^2$.

2064. Цепной линии $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

2065. Циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

2066. $\begin{cases} x=a[2t\cos t+(t^2-2)\sin t], \\ y=a[2t\sin t-(t^2-2)\cos t]. \end{cases}$

2067. $\begin{cases} x=a\cos t+(at+b)\sin t, \\ y=a\sin t-(at+b)\cos t. \end{cases}$

2068. Кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

2069. Гипоциклоиды $x=a(2\cos t+\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

2070. Трактрисы $x=-a\left(\ln\mathrm{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\sin t$.

2071. Кривой $y=a\ln\cos\frac{x}{a}$.

2072. Эвольвенты круга $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

2073. Логарифмической спирали $r=e^{a\varphi}$.

2074. Доказать равенство $\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}=\frac{\xi'^2+\eta'^2}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}$, где (x, y) — точка кривой, а (ξ, η) — соответствующая точка эволюты.

Пользуясь свойствами эволюты, найти длины дуг следующих кривых:

2075. Одной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2076. Астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ между точками $(a, 0)$ и $(0, a)$.

2077. Кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2078. Параболы Нейля $y^2 = x^3$ от $(0, 0)$ до $(4, 8)$.

2079. Эволюты параболы $y^2 = 2px$ от острия до точки пересечения эволюты с параболой.

2080. Логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$ при $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$.

Замечание. Все перечисленные кривые — эволюты других кривых, которые легко найти, пользуясь решениями задач, помещенных в первой части параграфа.

§ 5. Огибающие кривые

Уравнение $f(x, y, a) = 0$ при различных значениях a изображает семейство кривых. Иногда существует огибающая этого семейства, т. е. кривая, касающаяся с кривыми этого семейства. Координаты точки касания кривой семейства и огибающей удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{*}$$

Исключая из них параметр a, получаем уравнение, которому удовлетворяют все точки огибающей. Однако тем же уравнениям (*) удовлетворяют и точки геометрического места особых точек кривых семейства, т. е. точек кривых, где $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Два примера характерны:

1. Семейство парабол Нейля:

$$(y - a)^2 = x^3.$$

Уравнения (*) принимают вид:

$$y - a = 0, \quad (y - a)^2 = x^3.$$

Из них, исключая a, получаем $x = 0$. Легко видеть, что это уравнение дает геометрическое место особых точек кривых.

2. Семейство листов Декарта:

$$x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0.$$

Уравнения (*) принимают вид:

$$(y - a)^2 - x = 0, \qquad x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0.$$

Исключая a, приходим к уравнению: $x^4 = 4x$. Оно распадается на два: $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4}$. Первое из них дает геометрическое место особых точек, а второе — огибающую.

Не всякое семейство линий имеет огибающую: примером может служить семейство концентрических кругов. Может оказаться также, что часть кривых $f(x, y, a) = 0$ касается общей огибающей, а другая часть кривых того же семейства не касается ее и не имеет вообще огибающей.

В следующих задачах найти огибающую заданного семейства линий.

2081. $(x-a)^2+y^2=1$. **2082.** $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

2083. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ при $a^2+b^2=1$.

2084. $\lambda x^2+\mu y^2=1$ при $\lambda+\mu=\lambda\mu$.

2085. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ при $a+b=d$.

2086. Прямых, отсекающих от данного угла, величиной ω, треугольник с площадью $2m^2$.

2087. $bx+ay=ab$ при $a+b=c$.

2088. $bx+ay=ab$ при $a^2+b^2=c^2$.

2089. Вершина угла данной величины α скользит по оси Ox, а одна из сторон проходит через точку $(0, h)$. Найти огибающую другой стороны.

2090. Квадрат со стороной a движется так, что две стороны его AB и BC проходят через точки $(\pm b, 0)$. Найти огибающую диагонали AC.

2091. Прямая равномерно вращается вокруг точки, движущейся с данной скоростью по данной прямой. Найти огибающую подвижной прямой.

2092. Круг катится без скольжения по данной прямой. Найти огибающую его диаметра.

2093. На хордах окружности $x^2+y^2=a^2$, параллельных оси Oy, строятся, как на диаметрах, окружности. Найти их огибающую.

2094. Найти огибающую окружностей, имеющих центр на параболе и проходящих через ее вершину.

2095. Найти огибающую окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы, проходящих через фокус.

2096. Найти огибающую системы окружностей, имеющих центры на данном эллипсе и проходящих через центр эллипса.

2097. Найти огибающую окружностей с центрами на гиперболе $xy=a^2$, касающихся оси Ox.

2098. На радиусах-векторах кривой, как на диаметрах, строятся окружности. Доказать, что огибающая этих окружностей есть подэра кривой относительно полюса*).

2099. Круг $x^2+y^2=r^2$ есть огибающая семейства $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Какова зависимость между a и b?

2100. Переменные z и t связаны уравнением $\left(\frac{z}{a}\right)^m+\left(\frac{t}{b}\right)^m=1$. Найти огибающую кривых $\left(\frac{x}{z}\right)^n+\left(\frac{y}{t}\right)^n=1$.

---

*) Определение подэры см. на стр. 154

2101. Светящаяся точка имеет координаты $(a, 0)$. Найти огибающую лучей, отраженных от окружности $x^2+y^2=a^2$. (Каустика.)

2102. Параллельные лучи падают на сферическое зеркало. Найти огибающую отраженных лучей.

2103. Светящаяся точка имеет координаты $(a, 0)$. Найти огибающую лучей, отраженных от параболы $y^2=2px$.

§ 6. Построение кривых

Найти вершины, т. е. точки, где касательная параллельна одной из осей координат и где при этом нет точки перегиба, у следующих кривых:

2104. $x^2+xy+y^2=3$.

2105. $x^4+y^4=x^2+y^2$.

2106. $(x^2+y^2)^2=xy$.

2107. $x^4+4x^2y^2-6a^2x^2+a^4=0$.

2108. $y=\sin\frac{1}{x}$.

2109. $y=\sin x^2$.

2110. Найти расстояние по горизонтали между последовательными вершинами кривой $y=e^{-ax}\cos bx$.

Найти точки перегиба следующих кривых:

2111. $y=x^4-6x^2$

2112. $x^3+y^3=a^3$.

2113. $x^3+y^3=x^2$.

2114. $(a^2+x^2)y=ax^2$.

2115. $y=1+\sqrt[3]{x^5}$.

2116. $y=x^4e^{-x}$.

2117. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2118. $y=x^2\ln x$.

2119. $y=\operatorname{tg} x$.

2120. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

2121. $r\cos^3\varphi=1$.

2122. $r=a(\operatorname{tg}\varphi-1)$.

При исследовании формы кривой вблизи данной ее точки (a, b) полезно разложение в ряд Тэйлора. Если $f(x, y)=0$ — уравнение кривой, то, разлагая левую часть по степеням разностей $x-a=\xi$, $y-b=\eta$, в силу равенства $f(a, b)=0$ получаем:

$$p\xi+q\eta+\frac{1}{2}[r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2]+\ldots=0. \qquad (*)$$

Здесь для краткости через p, q, r, s и t обозначены соответственно значения производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ при $x=a$, $y=b$.

Если $p^2+q^2>0$, то при малых значениях $|\xi|$ и $|\eta|$ кривая близка к прямой $p\xi+q\eta=0$, т. е. к прямой $p(x-a)+q(y-b)=0$. Эта прямая — касательная к кривой в точке (a, b). Если же $p=0$ и $q=0$, т. е. если в данной точке обе производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в нуль, то уравнение (*) переходит в такое:

$$\frac{1}{2}[r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2]+\ldots=0.$$

Точка (a, b) является особой точкой кривой.

Если при этом $s^2 - rt > 0$, то точка (a, b) — двойная. В ней пересекаются две ветви кривой. Угловые коэффициенты касательных к этим ветвям равны корням квадратного уравнения $t\sigma^2 + 2s\sigma + r = 0$.

Если $s^2 - rt < 0$, то точка (a, b) — изолированная: в достаточной близости от нее на кривой точек нет. Если $s^2 - rt = 0$, то для полного изучения характера особой точки нужно принимать во внимание дальнейшие члены разложения ряда Тэйлора. Обычно при этом (a, b) есть точка возврата кривой.

Исследовать особые точки следующих алгебраических кривых:

2123. $y^2 = x^3$. **2124.** $y^2 = bx^3 + ax^2$.

2125. $y^2 = ax^2 + bx^5$. **2126.** $x^3 + y^3 - xy = 0$.

2127. $x^4 - 2ax^2y + 2ay^3 + a^2y^2 = 0$; $a \neq 0$.

2128. $x^6 - 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$.

2129. $2y^3x - y^4 = x(y - x)^2$. **2130.** $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2131. При каком соотношении между a и b кривая $y^2 = x^3 + ax + b$ имеет двойную точку?

2132. Доказать, что при $4a^3 + 27b^2 < 0$ кривая $y^2 = x^3 + ax + b$ состоит из двух отдельных частей, а при $4a^3 + 27b^2 > 0$ является сплошной линией.

При изучении трансцендентных кривых формула Тэйлора не всегда применима. Поэтому трансцендентные кривые имеют особые точки и таких видов, каких не имеется у алгебраических кривых. Таковы, например, точки прекращения и угловые точки.

Исследовать особые точки следующих трансцендентных кривых:

2133. $y = x^x$. **2134.** $y = x \ln x$. **2135.** $y \ln x = 1$.

2136. $y = e^{\frac{1}{x}}$. **2137.** $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ **2138.** $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

2139. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **2140.** $y = x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **2141.** $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

2142. $y = x \sin\dfrac{1}{x}$. **2143.** $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$. **2144.** $x^y = y^x$.

При отыскании асимптот кривых следует различать два случая — асимптоты, параллельные оси Oy, и асимптоты, не параллельные ей. Первые имеют уравнения $x = x_0$, где x_0 — то значение x, при котором $y = f(x)$ обращается в ∞. Прямая $y = ax + b$, не параллельная оси Oy, будет асимптотой кривой в том случае, если при $x \to \infty$ для точек кривой имеет мест; равенство

$$y = ax + b + \varepsilon(x), \quad \text{где } \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Отсюда следует, что $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - ax)$.

Найти асимптоты следующих кривых:

2145. $y = \dfrac{x}{x - 1}$. **2146.** $y = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$.

2147. $y=\pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

2148. $y=x+\frac{1}{x}$.

2149. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

2150. $y^2=\frac{x^3+ax^2}{x-a}$.

2151. $y^2=\frac{x^3-a^3}{x+b}$.

2152. $y^3-x^3=x^2+y^2$

2153. $x^3+y^3=a^3$.

2154. $x^3+y^3=3axy$.

2155. $x^3+y^3+2y-x=0$.

2156. $r\varphi=a$.

Изучить форму следующих кривых, предварительно решив уравнение кривой относительно одной из координат:

2157. $y^2=x^3(2-x)$.

2158. $x^4+y^4=a^4$.

2159. $x^{2n}+y^{2n}=a^{2n}$, n — целое положительное и большое.

2160. $x^4-4x^2y^2-6x^2-4y^2=0$.

2161. $x^4-6x^2y+25y^2-16x^2=0$.

2162. $y^2-x^4+x^6=0$.

2163. $x^4+x^2y^2-18x^2y+9y^2=0$.

2164. $x^4+y^4-3x^3-4x^2=0$.

2165. $y^4-2xy^2-3x^2+x^4=0$.

2166. $x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0$.

2167. $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

Изучить форму следующих замкнутых кривых, перейдя к полярным координатам:

2168. $x^4+y^4=2xy$.

2169. $(x^2+y^2-6x)^2=x^2+y^2$ (улитка Паскаля).

2170. $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$ (кардиоида).

2171. $x^4+y^4=8xy^2$.

2172. $x^4+y^4=x^2+y^2$.

2173. $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$.

2174. $(x^2+y^2)^2=xy$.

При исследовании кривых с ветвями, уходящими в бесконечность, важно выяснить, имеются ли асимптоты и каково расположение далеких частей кривой относительно асимптот. Следующие примеры указывают наиболее удобные пути исследования:

1. Кривая $x^4-2x^3y+x^2y^2=y$.

Деля на x^2 и извлекая корень, получаем: $x-y=\pm\frac{\sqrt{y}}{x}$, $y=x\pm\frac{\sqrt{y}}{x}$. Если кривая имеет асимптоту $y=\alpha x+\beta$, то при $x\to\infty$ величина отношения $\frac{y}{x}\to\alpha$. Поэтому слагаемое $\frac{\sqrt{y}}{x}$ представляет величину меньшего порядка, чем x. Следовательно, $y\approx x$. Внося это первое приближение в правую часть равенства для y, получаем: $y=x\pm\frac{\sqrt{x}}{x}=x\pm\frac{1}{\sqrt{x}}$. Это — второе приближение для y при больших значениях $|x|$. Оно показывает, что кривая имеет асимптоту $y=x$. При этом кривая приближается к асимптоте только при $y\to+\infty$ двумя ветвями — сверху и снизу.

У той же кривой есть и другая асимптота. Разделив уравнение кривой на $(x-y)^2$ и извлекая корень, находим: $x=\frac{\pm\sqrt{y}}{x-y}$. Если x оставлять ограниченным, то отсюда при $|y|\to\infty$ следует, что $x\approx\pm\frac{\sqrt{y}}{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}$. Это показывает, что у кривой есть асимптота $x=0$. При этом кривая приближается к ней в сторону ее верхней половины при $y\to+\infty$. Приближение выполняется двумя ветвями — справа и слева.

2. Кривая $x^3+y^3=x^2+y^2$.

Совокупность слагаемых высшей степени x^3+y^3 имеет линейный множитель $x+y$. Это дает одну асимптоту. Деля на x^2-xy+y^2, находим: $x+y=\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$ или $y=-x+\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$. В правой части второе слагаемое можем отбросить как величину низшего порядка. Таким образом, получаем первое приближение для y при $x\to\infty$: $y\approx-x$. Подставляя его в правую часть формулы для y, получаем:

$$y\approx-x+\frac{x^2+x^2}{x^2+x^2+x^2}=-x+\frac{2}{3}.$$

Это — второе приближение для y. Подставляя его в правую часть формулы для y, получаем:

$$y\approx-x+\frac{x^2+\left(-x+\frac{2}{3}\right)^2}{x^2-x\left(-x+\frac{2}{3}\right)+\left(-x+\frac{2}{3}\right)^2}=-x+\frac{2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{3x^2-2x+\frac{4}{9}}=$$

$$=-x+\frac{2}{3}\,\frac{1-\frac{2}{3x}+\frac{2}{3x^2}}{1-\frac{2}{3x}+\frac{4}{27x^2}}=-x+\frac{2}{3}+\frac{4}{81x^2}.$$

Это — третье приближение для y. Оно показывает, что кривая имеет асимптоту $y=-x+\frac{2}{3}$. При этом кривая приближается к ней в обе стороны: при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, оставаясь выше, чем асимптота.

Изложенные приемы дают простой способ исследования асимптот алгебраических кривых. Каждая из них получается выделением линейного множителя в совокупности членов уравнения, имеющих высшую степень относительно x и y одновременно.

Более трудно исследование параболических ветвей кривой, по которым кривая уходит в бесконечность, не приближаясь к какой-нибудь прямой. Наиболее полный способ исследования основан на разложении y в ряд по убывающим целым или дробным степеням x.

Способ получения такого разложения принадлежит Ньютону, а полное доказательство сходимости этого разложения при достаточно больших значениях $|x|$ было дано лишь в середине XIX в. французским ученым Пюизё. Этот способ дает заодно и исследование асимптот, если они существуют. Рассмотрим его в применении к кривой,

$$x^4+x^3y=y^3+xy.$$

Если заменить здесь y на x^{σ}, четыре члена уравнения обратятся в степени x с показателями

$$4, 3+\sigma, 3\sigma, 1+\sigma. \tag{*}$$

Приравнивая эти показатели попарно друг другу, найдем такие значения σ: $1, \frac{4}{3}, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. При этих значениях σ числа (*) дадут четверки чисел:

σ	4	$3+\sigma$	3σ	$1+\sigma$
1	4	4	3	2
$\frac{4}{3}$	4	$\frac{13}{3}$	4	$\frac{7}{3}$
3	4	6	9	4
$\frac{3}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

В каждой строчке этой таблицы должны находиться по крайней мере два равных числа. Выбираем те строчки, где эти равные числа больше остальных чисел той же строчки. Таких строчек две — при $\sigma = 1$ и при $\sigma = \frac{3}{2}$. Каждая из них дает разложение искомого вида. При $\sigma = 1$ разложение будет иметь вид:

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \ldots, \tag{1}$$

а при $\sigma = \frac{3}{2}$ —

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx + cx^{\frac{1}{2}} + d + ex^{-\frac{1}{2}} + fx^{-1} + \ldots \tag{2}$$

Коэффициенты находятся обычными приемами.

Для получения разложения (1) удобно в уравнении $x^4 + x^3y = y^3 + xy$ положить $y = \frac{u}{\xi}$, $x = \frac{1}{\xi}$. После этого оно переходит в такое:

$$1 + u = \xi u^3 + \xi^2 u. \tag{3}$$

При этих обозначениях разложение (1) принимает вид:

$$u = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + \ldots$$

Отсюда находим:

$$u^2 = A^2 + 2AB\xi + (2AC + B^2)\xi^2 + \ldots,$$
$$u^3 = A^3 + 3A^2B\xi + (3A^2C + 3AB^2)\xi^2 + \ldots$$

Подставляя эти разложения в уравнение (3), получаем:

$$1 + A + B\xi + C\xi^2 + \ldots = \xi\,[A^3 + 3A^2B\xi + 3(A^2C + AB^2)\xi^2 + \ldots] +$$
$$+ \xi^2(A + B\xi + C\xi^2 + \ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в обеих частях равенства, находим

$$1+A=0,\ B=A^3,\ C=3A^2B+A,\ D=3(A^2C+AB^2)+B,\dots$$

Отсюда получаются значения коэффициентов:

$$A=-1,\ B=-1,\ C=-4,\ D=-16,\dots$$

Разложение (1) принимает вид

$$y=-x-1-\frac{4}{x}-\frac{16}{x^2}-\dots$$

Оно показывает, что у кривой имеется асимптота $y=-x-1$. При этом, если $x\to+\infty$, то ветвь кривой приближается к асимптоте, идя снизу, а при $x\to-\infty$ — идя сверху.

Для получения разложения (2) в уравнении $x^4+x^3y=y^3+xy$ удобно положить $x=\frac{1}{\xi^2}$, $y=\frac{u}{\xi^3}$. После этого уравнение переходит в такое:

$$\xi+u=u^3+u\xi^4. \tag{4}$$

Разложение (2) принимает вид:

$$u=a+b\xi+c\xi^2+d\xi^3+\dots$$

Отсюда получаем:

$$u^2=a^2+2ab\xi+(2ac+b^2)\xi^2+(2ad+2bc)\xi^3+\dots,$$
$$u^3=a^3+3a^2b\xi+(3a^2c+3ab^2)\xi^2+(2a^2d+6abc+b^3)\xi^3+\dots$$

Подставляя эти разложения в равенство (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим:

$$a=a^3,\quad 1+b=3a^2b,\quad c=3a^2c+3ab^2,\quad d=2a^2d+6abc+b^3,\dots$$

Отсюда, так как $a\neq 0$, получаем две системы решений:

$$a=1,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{3}{8},\ d=1,\dots;$$

$$a=-1,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{3}{8},\quad d=1,\dots$$

Поэтому разложение (2) имеет вид:

$$y=x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}\sqrt{x}+1+\dots \tag{5}$$

Здесь $\sqrt{x}$ может иметь каждое из значений $+\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$.

Полученный результат показывает, что у данной кривой имеются две бесконечные ветви, уходящие в бесконечность при $x\to+\infty$, так что расстояние между ними и кривыми $y=\pm x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\mp\frac{3}{8}\sqrt{x}+1$ стремится к нулю.

Замечание. В таблице, из которой мы получили значения $\sigma=1$ и $\sigma=\frac{3}{2}$, имеются значения $\sigma=3$ и $\sigma=\frac{1}{2}$, при которых равные значения являются наименьшими среди чисел соответствующей строчки. Они дают разложения, сходящиеся при достаточно малых значениях $|x|$ и расположенные по возрастающим степеням x. Эти разложения имеют вид:

$$y = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + Ex^7 + \dots,$$

$$y = ax^{\frac{1}{2}} + bx + cx^{\frac{3}{2}} + dx^2 + ex^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Коэффициенты их находятся подобными же приемами, после чего первое разложение дает равенство:

$$y = x^3 + x^5 - x^6 + x^7 + \dots$$

Это равенство показывает, что в начале координат кривая имеет соприкасание четвертого порядка с кривой $y = x^3$ и подобно ей имеет точку перегиба.

Другое разложение в данном случае геометрического смысла не имеет, так как среди его коэффициентов имеются мнимые, — в частности, $a = \pm i$.

Разложения указанного типа дают наиболее сильное средство при изучении кривой в окрестности особой точки, которая путем переноса координат помещена в начале координат.

Построить кривые (считать $a > 0$):

2175. $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$.

2176. $4y^2 = 4x^2y + x^5$

2177. $x^5 + 5ax^4 - 16a^3y^2 = 0$.

2178. $y^3 - x^2y + x^5 = 0$.

2179. $y^5 + x^4 = xy^2$.

2180. $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$.

2181. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$.

2182. $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$.

2183. $(x^2 - y^2)^2 = 2x$.

2184. $x^2(x - y)^2 + y = 0$.

2185. $x^3y^3 = x - y$.

2186. $x^2y^2 + x - 2y = 0$.

2187. $(2x + y)^2(x + y) = x$.

2188. $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$.

2189. $3x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 2x = 0$.

2190. $xy(x - y) + x + y = 0$.

2191. $x^2y^2 + y = 1$.

2192. $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$.

2193. $xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 12$.

2194. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.

2195. $(x^2 - y^2)^2 = 4xy$.

2196. $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$.

2197. $x^4 - y^4 + xy = 0$.

2198. $x^2(x^2 + y^2) = 4(x - y)^2$.

2199. $x^4 - y^4 = 4y^2 - x^2$.

2200. $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$.

2201. $(x^2 - 1)y^2 = x^4 - 4x^2$.

2202. $x^2(y - 2)^2 + 2xy = y^2$.

2203. $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$.

2204. $(x + 1)(x + 2)y^2 = x^2$.

2205. $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$.

2206. $(2a - x)y^2 = x^3$.

2207. $x^3 + y^3 = 3x^2$.

2208. $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$.

2209. $x^4 - y^4 = 4x^2y$.

2210. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$.

2211. $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$.

2212. $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

2213. $x^5 + y^5 = xy^2$.

2214. $x^4 + 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$.

Изучить следующие кривые, уравнения которых даны в параметрической форме или могут быть заданы в такой форме:

2215. $x = \frac{2 + t^2}{1 + t^2},\ y = t - \frac{t}{1 + t^2}$.

2216. $x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)},\ y = \frac{t}{t + 1}$.

2217. $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $y=\frac{t}{t^4+1}$.

2218. $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

2219. $x=\frac{t^2}{t^2-1}$, $y=\frac{t^2+1}{t+2}$.

2220. $x=\frac{t^2-3}{t^2+1}$, $y=\frac{t(t^2-3)}{t^2+1}$.

2221. $x=\frac{t-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

2222. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

2223. $x=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

2224. $x=\frac{2t-1}{t^3(t-1)}$, $y=\frac{2t-1}{t^2(t-1)}$.

2225. $y^2=a^2\sin\frac{y}{x}$.

2226. $y^2=a^2\cos\frac{y}{x}$.

2227. Исследовать линию $x^y=y^x$, заметив, что она распадается на прямую $y=x$ и кривую

$$x=(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},\quad y=(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}+1}.$$

§ 7. Кривые двоякой кривизны: касательная прямая и нормальная плоскость

2228. Показать, что линия

$$x=at^2+bt+c,\quad y=a_1t^2+b_1t+c_1,\quad z=a_2t^2+b_2t+c_2$$

лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

2229. При каком соотношении между коэффициентами a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 кривая

$$x=a\varphi(t)+b\psi(t)+c\omega(t)+d,$$
$$y=a_1\varphi(t)+b_1\psi(t)+c_1\omega(t)+d_1,$$
$$z=a_2\varphi(t)+b_2\psi(t)+c_2\omega(t)+d_2$$

лежит в плоскости?

2230. Показать, что кривая $x=\sin 2\varphi, y=1-\cos 2\varphi, z=2\cos\varphi$ лежит на поверхности шара.

2231. Показать то же для кривой

$$x=\frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}.$$

2232. Перевести в параметрическую форму уравнение кривой Вивиани, определенной пересечением шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ и цилиндра $x^2+y^2=ax$, положив $x=a\sin^2 t$.

2233. Доказать, что проекция предыдущей кривой на плоскость xOz есть парабола.

2234. Найти проекцию на плоскость xOy линии пересечения параболоида $z=x^2+y^2$ и плоскости $x+y+z=1$.

2235. Найти проекцию линии $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $z=2t$ на плоскость xOy.

2236. Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$$

на плоскость yOz есть синусоида.

2237. Доказать, что при переносе начала координат в точку $O_1(0, 0, b\beta)$ и повороте осей абсцисс и ординат вокруг оси O_1z_1 на угол β уравнениям винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ можно придать вид: $x_1 = a\cos t_1$, $y_1 = a\sin t_1$, $z_1 = bt_1$. Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

2238. Найти уравнение касательной к кривой

$$x = \frac{t^4}{4},\quad y = \frac{t^3}{3},\quad z = \frac{t^2}{2}.$$

2239. Найти касательную к предыдущей кривой, параллельную плоскости $x + 3y + 2z = 0$.

2240. Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$.

2241. У кривой $x = -t\cos t + \sin t$, $y = t\sin t + \cos t$, $z = t + 1$ найти точки, в которых касательная параллельна плоскости yOz или xOz.

2242. Найти касательную к кривой $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ в точке $(1, 3, 4)$.

2243. Найти касательную к кривой $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ в точке $(-2, 1, 6)$.

2244. Найти касательную к кривой $x^2 + y^2 = z$, $x = y$ в точке $(m, m, 2m^2)$.

2245. Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

2246. Такой же вопрос для круга $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = mx$.

2247. К кривой $y^2 = 2px$, $z^2 = 2qx$ проведена касательная в точке, где $x = \frac{p+q}{2}$. Найти ее длину от точки касания до плоскости $x = 0$.

2248. Найти угол между касательной к кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ и вектором, проведенным из начала координат в точку касания.

2249. Найти нормальную плоскость к кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$.

2250. В точке, где $x = \frac{p}{2}$, найти нормальную плоскость к кривой $y^2 = 2px$, $x^2 + z^2 = a^2$.

2251. Доказать, что нормальные плоскости кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin\alpha\sin t$, $z = a\cos\alpha\sin t$ проходят через прямую $x = 0$, $z + y\operatorname{tg}\alpha = 0$.

2252. Доказать, что кривая $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

2253. При каком a кривая $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$, $z = e^{at}$ пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом 45°?

2254. Доказать, что линии пересечения цилиндров $y^2 + z^2 = m^2$ с поверхностью $xy = az$ пересекают под прямым углом все образующие этой поверхности, принадлежащие одной системе.

2255. Линия $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $y = b\cos t$, $z = b\sin t$ расположена на поверхности параболоида. Доказать, что она пересекает все образующие одной системы под прямым углом.

2256. Кривая, называемая локсодромией, определяется уравнением $\varphi = a\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$, где θ — широта, а φ — долгота точки на шаре. Доказать, что она пересекает меридианы шара под углом α, тангенс которого равен a.

Стереографическая проекция состоит в следующем. Верхняя точка шара $x^2 + y^2 + z^2 = az$, т. е. точка $A(0, 0, a)$, соединяется прямой с произвольной точкой $M(x, y, 0)$ плоскости xOy. Точка M_1, в которой прямая AM пересекает поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = az$, является изображением на шаре точки M плоскости xOy, а точка M является изображением точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на шаре. Таким образом, стереографическая проекция дает взаимно однозначное соответствие точек плоскости и шара, за исключением точки A, лежащей на верху шара. При этом

$$x_1 = \frac{a^2x}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad y_1 = \frac{a^2y}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad z_1 = \frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

2257. Доказать, что стереографическая проекция дает конформное изображение, т. е. что линии на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их изображения на шаре.

2258. Доказать, что кривая $r = e^{m\varphi}$, расположенная на плоскости xOy, где полярная ось совпадает с положительной частью оси Ox, при стереографической проекции переходит в локсодромию.

2259. Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности на плоскости. При этом прямые считаются за частные случаи окружностей.

2260. Центральная проекция шара $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ на плоскость xOy образуется следующим образом. Произвольная точка $M(x, y, 0)$ плоскости xOy соединяется прямою AM с центром шара $A(0, 0, a)$. Точка M_1, в которой AM пересекает шар, принимается за изображение точки M, и обратно. Доказать, что эта проекция не есть конформное изображение.

2261. Доказать, что касательная к кривой $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ образует постоянный угол с некоторым определенным направлением.

2262. Координаты точек некоторой кривой удовлетворяют соотношению

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2.$$

Доказать, что касательные к этой кривой касаются шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2263. Доказать, что касательные к кривой

$$x = a(\sin t + \cos t),\quad y = a(\sin t - \cos t),\quad z = be^{-t}$$

пересекают xOy по окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$.

2264. Найти линии, по которым касательные к винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ пересекают: 1) плоскость xOy; 2) плоскость xOz.

Сферической индикатрисой касательных данной кривой называют геометрическое место концов единичных векторов, проведенных из начала координат и параллельных этим касательным.

2265. Найти сферическую индикатрису касательных винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2266. Тот же вопрос для кривой

$$x = 2t - \sin 2t,\quad y = \cos 2t,\quad z = 4\sin t.$$

§ 8. Кривые двоякой кривизны: соприкасающаяся плоскость, нормаль и бинормаль

2267. Пользуясь третьей формулой Френе, показать, что кривая, у которой кручение постоянно равно нулю, лежит в плоскости.

Найти соприкасающиеся плоскости кривых:

2268. $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке $(1, 1, 1)$.

2269. $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$.

2270. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

2271. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

2272. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2273. $x = at^2 + bt + c$, $y = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $z = a_2t^2 + b_2t + c_2$.

2274. Доказать, что соприкасающаяся плоскость линии $x^2 = \varphi'(t)$, $y^2 = t^2\varphi'(t)$, $z = \varphi(t)$, расположенной на коноидальной поверхности $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, совпадает с касательной плоскостью к этой поверхности.

Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривым:

2275. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2276. $x = y^2$, $z = x^2$ в точке $(1, 1, 1)$.

2277. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$.

2278. $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{2t^3}{3}$, $z = \frac{t^4}{2}$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

2279. Найти уравнения сферических индикатрис главной нормали и бинормали винтовой линии (см. задачи 2265, 2275).

2280. Кривая $x = a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z = at$ лежит на поверхности вращения $x^2 + y^2 = a^2\,\mathrm{ch}^2\frac{z}{a}$, называемой катеноидом.

Доказать, что в каждой точке кривой бинормаль совпадает с нормалью к поверхности.

2281. Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к кривой $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ имеет постоянное направление.

2282. Кривая имеет проекцией на плоскость xOy синусоиду $y=\sin x$. Какому соотношению должны удовлетворять аппликаты z ее точек, чтобы главные нормали были параллельны плоскости yOz?

2283. По главным нормалям винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ откладываются отрезки данной длины l. Найти геометрическое место их концов.

2284. Найти поверхность, на которой располагаются все главные нормали винтовой линии предыдущей задачи.

2285. Тот же вопрос для бинормалей.

Найти радиусы кривизны ρ у следующих кривых:

2286. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$.

2287. $x=a\operatorname{ch}t\cos t$, $y=a\operatorname{ch}t\sin t$, $z=at$.

2288. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$.

2289. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$.

2290. $x=a\frac{\cos t}{\operatorname{ch}t}$, $y=a\frac{\sin t}{\operatorname{ch}t}$, $z=a(t-\operatorname{th}t)$.

2291. $x^2=2az$, $y^2=2bz$.

2292. $x^2-y^2+z^2=1$, $y^2-2x+z=0$ в точке $(1, 1, 1)$.

2293. $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$.

2294. $x=a(1-\cos 2t)$, $y=a\sin 2t$, $z=2a\cos t$.

2295. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $z=a\cos 2t$.

2296. $x=\sin z-z\cos z$, $y=\cos z+z\sin z$.

Найти кручение кривых:

2297. $y^2=x$, $x^2=z$.

2298. $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$.

2299. $x=\sin u-u\cos u$, $y=\cos u+u\sin u$, $z=u$.

2300. $x=a(1-\cos t)$, $y=a\sin 2t$, $z=2a\cos t$.

2301. Найти кривизну и кручение кривой $y=\frac{x^2}{2a}$, $z=\frac{x^3}{6a^2}$.

2302. Тот же вопрос для кривой $x=2abt$, $y=a^2\ln t$, $z=b^2t^2$.

2303. Тот же вопрос для кривой

$$x=a\frac{\cos t}{\cos kt},\quad y=a\frac{\sin t}{\cos kt},\quad z=\frac{a\sqrt{1+k^2}}{k\cos kt}.$$

2304. Доказать равенство радиусов кривизны и кручения у кривой $x=\operatorname{ch}z$; $y=\operatorname{sh}z$.

2305. Доказать, что у сопровождающего триэдра кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $z=e^t$ каждое из ребер образует с Oz постоянный угол.

2306. При каком условии центр кривизны винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

2307. Доказать, что у кривой

$$x=a\operatorname{ch} t\cos t,\quad y=a\operatorname{ch} t\sin t,\quad z=at$$

отрезок нормали (не главной!) от точки на кривой до оси Oz равен радиусу второй кривизны.

2308. Через четыре точки кривой можно провести шар. Если они стремятся к одной точке, то при соответствующих условиях шар этот стремится к некоторому предельному шару, называемому соприкасающимся шаром. Найти его центр и радиус.

2309. Найти приближенные с точностью до малых высшего порядка уравнения проекций кривой на три плоскости сопровождающего триэдра вблизи точки касания.

2310. Из центра шара проводятся радиусы, параллельные главным нормалям замкнутой кривой, не имеющей особых точек. Доказать, что геометрическое место их концов делит поверхность шара на две равновеликие части. (Якоби.)

§ 9. Поверхности. Их уравнения

2311. Поверхности, описанные прямой, проходящей через данную точку (a, b, c) и данную кривую, называются коническими. Доказать, что их уравнения могут быть представлены в виде:

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0.$$

2312. Поверхности, образованные движением прямой, параллельной вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$ и проходящей через данную кривую, называются цилиндрическими. Доказать, что общий вид уравнения цилиндрических поверхностей:

$$f(nx-lz,\ ny-mz)=0.$$

2313. Доказать, что уравнение поверхностей вращения около оси Oz имеет вид: $f(x^2+y^2, z)=0$.

2314. Доказать, что уравнение поверхности вращения около прямой $x=a+lt$, $y=b+mt$, $z=c+nt$ имеет вид:

$$f(lx+my+nz, R)=0,$$

где

$$R=[n(y-b)-m(z-c)]^2+[l(z-c)-n(x-a)]^2+\\+[m(x-a)-l(y-b)]^2.$$

2315. Найти уравнение цилиндра, описанного около шара x^2+y^2+ $+z^2=a^2$, с образующими, параллельными прямой $x=lt$, $y=m$, $tz=nt$.

2316. Найти уравнение цилиндра с образующими, параллельными прямой $x = y = z$, описанного около эллипсоида $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

2317. Найти уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой кривая $z = 0$, $x^2 + y^2 = ay$, а образующие которой параллельны вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$.

2318. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке $(-1, 0, 0)$ и описанной около параболоида $2y^2 + z^2 = 4x$.

2319. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке (a, b, c), а направляющей — параболу $z = 0$, $y^2 = 2px$.

2320. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке $(0, 0, -c)$, а направляющей — лемнискату $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

2321. Около параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ описать коническую поверхность с вершиной в точке $(0, 0, -2)$.

2322. Найти уравнение конической поверхности, описанной около поверхности $xyz = c^3$ и с вершиной в $(0, 0, -3c)$.

Найти уравнения поверхностей, полученных вращением данной кривой вокруг данной оси:

2323. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

2324. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.

2325. Параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox.

2326. Окружности $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ около оси Oy.

2327. Параболы $y^2 = 2px$ около оси Oy.

2328. Лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около Ox.

2329. Той же кривой около оси Oy.

2330. Поверхность, происходящая от вращения синусоиды $x = \sin z$, $y = 0$ около оси Oz, освещена параллельными лучами, составляющими с Oz угол $45°$. Найти форму тени, отбрасываемой ею на плоскость xOy.

Параметрическое представление поверхностей, введенное Гауссом, состоит в том, что координаты точек поверхности даются в функции от двух параметров:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v).$$

Следующие вопросы имеют дело с параметрическими уравнениями поверхностей.

2331. Уравнение шара можно представить в виде:

$$x = a \sin\theta \cos\varphi, \quad y = a \sin\theta \sin\varphi, \quad z = a \cos\theta.$$

Найти подобную форму уравнения для эллипсоида.

2332. Поверхность задана уравнениями

$$x = a\cos^4 u \cos^4 v, \quad y = a\cos^4 u \sin^4 v, \quad z = a \sin^4 u.$$

Найти ее уравнение в обычной форме.

2333. Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a\cos^3 u \cos^3 v, \quad y = a\cos^3 u \sin^3 v, \quad z = a\sin^3 v.$$

2334. Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}, \quad y = b\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad z = c\frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

§ 10. Касательные плоскости и нормали. Огибающие

Найти касательные плоскости к поверхностям:

2335. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_1, y_1, z_1).

2336. $x^2+y^2=z^2$ в точке (x_1, y_1, z_1).

2337. $xy^2+z^3=12$ в точке $(1, 2, 2)$.

2338. $x^n+y^n+z^n=a^n$ в точке (x_1, y_1, z_1).

2339. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2+z^2)$ в точке (x_1, y_1, z_1).

2340. Уравнение алгебраической поверхности имеет вид $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ — полином. Вводя дополнительно степени вспомогательной переменной t, можно сделать этот полином однородным, после чего уравнение поверхности принимает вид: $F(x, y, z, t)=0$ при $t=1$. Доказать, что уравнение касательной плоскости к этой поверхности можно написать в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x}X+\frac{\partial F}{\partial y}Y+\frac{\partial F}{\partial z}Z+\frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

где переменное t после дифференцирования заменено единицей.

2341. Определить расстояние от начала координат касательной плоскости к поверхности $x\cos\frac{2\pi z}{h}=y\sin\frac{2\pi z}{h}$.

2342. К поверхности $xyz=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x+y+z-3=0$.

2343. Найти линии, по которым касательная плоскость к поверхности $xy=az$ в точке (x_1, y_1, z_1) пересекается с поверхностью.

2344. Найти уравнение касательной плоскости к косому геликоиду $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$.

2345. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ в точке $(2, 2, 2)$.

2346. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

2347. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$, образуют на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

2348. Доказать, что у поверхности $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ сумма квадратов отрезков, образованных касательной плоскостью на осях, есть величина постоянная.

2349. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$, проходят через одну и ту же точку.

2350. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z=x+f(y-z)$, параллельны одной и той же прямой.

2351. Доказать, что отрезок на оси Oz, образованный плоскостью, касательной к поверхности $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$, пропорционален расстоянию точки касания до начала координат.

2352. Найти поверхность, на которой лежат касательные к винтовой линии, и доказать, что нормаль к этой поверхности составляет с Oz постоянный угол.

2353. Найти на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ точки, в которых нормаль образует постоянный данный угол α с осью Ox.

2354. Доказать, что точка пересечения нормали к поверхности $x^2+y^2+z^2=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ с плоскостью xOy одинаково удалена от начала координат и от основания нормали.

2355. Отрезок нормали к поверхности $z^2=2a\sqrt{x^2+y^2}+b$, заключенный между поверхностью и плоскостью xOy, проектируется на xOy. Доказать, что величина проекции постоянна.

2356. Доказать такое же свойство для нормалей к поверхности

$$x=v\cos u-\varphi(u)\cos u+\varphi'(u)\sin u,$$
$$y=v\sin u-\varphi(u)\sin u-\varphi'(u)\cos u,$$
$$z=\sqrt{2v}.$$

2357. Из точки M на поверхности

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z^2=-r^2+f(re^{\varphi})$$

проводится нормаль MN до точки N на плоскости xOy, и опускается перпендикуляр MP на плоскость xOy. Доказать, что $\angle NOP$, где O — начало координат, равен $45°$.

2358. Доказать, что у поверхности $z^2=a^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+f(x^2+y^2)$ площадь треугольника NOP, полученного таким же путем, как и в предыдущей задаче, есть величина постоянная.

В следующих задачах требуется установить взаимную ортогональность указанных поверхностей (так что, если заданы три поверхности, то надо доказать, что каждая из них пересекается с каждой из остальных под прямым углом).

Доказать ортогональность следующих систем поверхностей:

2359. $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

2360. $xyz = a^3$, $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$.

2361. $xy = az$, $\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = \beta$, $\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = \gamma$.

2362. $x^2 + y^2 + z^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = by$, $x^2 + y^2 + z^2 = cz$.

2363. $x(x^2 + y^2 + z^2) + a(x^2 + y^2 - z^2) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$.

2364. Через каждую точку (x, y, z) проходят три поверхности вида $\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$ при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, представляющие соответственно эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды. Доказать ортогональность этих поверхностей.

2365. Из точек прямой $y = x$, $z = \frac{\pi}{4}$, лежащей на поверхности $y = x \operatorname{tg} z$, проводятся нормали к поверхности. Доказать, что они располагаются на гиперболическом параболоиде.

2366. Такой же вопрос для прямой $z = h$, $by = x\sqrt{a^2 - h^2}$ и поверхности $b^2y^2 = x^2(a^2 - z^2)$.

2367. Найти геометрическое место проекций центра эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ на касательные плоскости.

2368. По эллипсоиду предыдущей задачи (при $a > b > c$) катится без скольжения и верчения другой такой же эллипсоид так, что в один из моментов концы больших полуосей соприкасались. Найти геометрическое место концов большой полуоси.

2369. Доказать, что поверхность $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 2xyz$ пересекается шаром $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ по четырем кругам.

Поверхности $f(x, y, z, a) = 0$, уравнения которых содержат коэффициент a, меняющийся от одной поверхности к другой, образуют однопараметрическое семейство поверхностей. Если две бесконечно близкие поверхности пересекаются по некоторой линии, то координаты точек этой линии, называемой характеристической линией, удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Исключая параметр a из этих уравнений, найдем уравнение $F(x, y, z) = 0$. Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то она вся лежит на полученной поверхности.

Подобно этому, уравнение $f(x, y, z, a, b) = 0$ изображает двухпараметрическое семейство поверхностей. Предельное положение точки пересечения трех близких поверхностей

$f(x, y, z, a, b) = 0$, $f(x, y, z, a + \Delta a, b) = 0$, $f(x, y, z, a, b + \Delta b) = 0$

при $\Delta a \to 0$ и $\Delta b \to 0$, т. е. характеристическая точка поверхности семейства удовлетворяет уравнениям:

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Исключая отсюда параметры a и b, получим уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$. Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то все ее точки удовлетворяют полученному уравнению; но ему могут удовлетворять и другие точки.

Найти огибающую следующих семейств поверхностей:

2370. Шаров $(x-a)^2+y^2+z^2=1$.

2371. Плоскостей, проходящих через точку $(\sqrt{2}, 0, 0)$ и удаленных от начала на расстояние, равное единице.

2372. Найти огибающую шаров

$$(x-lt)^2+(y-mt)^2+(z-nt)^2=a^2,$$

где t — переменный параметр.

2373. Найти огибающую шаров, большие круги которых расположены на параболоиде $z=x^2+y^2$.

2374. Тот же вопрос для параболоида $2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$.

2375. Найти огибающую шаров радиуса a, центры которых лежат на окружности $x^2+y^2=r^2$, $z=0$.

2376. Найти огибающую плоскостей, касающихся парабол $y^2=2x$, $z=0$; $y^2=2z$, $x=0$.

2377. Найти огибающую шаров

$$(x-lt)^2+(y-mt)^2+(z-nt)^2=p^2t^2,$$

где t — переменный параметр.

2378. Найти огибающую эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ при условии $a^2+b^2+c^2=1$.

2379. То же при условии $a+b+c=1$.

2380. Найти огибающую плоскостей, образующих при пересечении с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

2381. Найти огибающую плоскостей, у которых отрезки a, b, c на осях связаны равенством $a^n+b^n+c^n=1$.

2382. Показать, что круги $y=tx$, $x^2+y^2+z^2-2f(t)x-a^2=0$ суть характеристики семейства шаров

$$x^2+y^2+z^2-2[f(t)+tf'(t)]x-2f'(t)y-a^2=0.$$

§ 11. Линии на поверхностях и кривизна поверхностей

Найти главные радиусы кривизны следующих поверхностей:

2383. Эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $(0, 0, c)$

2384. Параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ в точке $(0, 0, 0)$.

2385. Геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=mv$.

2386. Параболоида $xy=az$.

2387. Поверхности $e^z \cos x = \cos y$.

2388. $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

2389. Катеноида $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$.

2390. Доказать, что если ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны в некоторой точке эллипсоида, то на линии пересечения эллипсоида с концентричным шаром $\sqrt[4]{\rho_1\rho_2} = m(\rho_1 + \rho_2)$, где m — постоянная.

2391. Омбилической точкой, или точкой закругления, называется точка поверхности, где главные радиусы кривизны равны: $\rho_1 = \rho_2$. Найти точки закругления эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2392. То же для эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

2393. Найти полную кривизну параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

2394. Доказать, что средняя кривизна поверхности

$$z = \ln \cos x - \ln \cos y$$

равна нулю.

2395. Доказать, что полная кривизна параболоида постоянна для точек пересечения его с соответствующим эллиптическим цилиндром.

2396. Найти полную и среднюю кривизны поверхности вращения $z = f(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2397. Доказать, что поверхность вращения трактрисы

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

вокруг оси Ox обладает постоянной отрицательной кривизной, равной $-\frac{1}{a^2}$.

З а м е ч а н и е. Отсюда следует, что на этой поверхности выполняется геометрия Лобачевского.

2398. Через вершину параболоида вращения $y^2 + z^2 = 2px$ проводятся кривые на его поверхности. Найти геометрическое место их центров кривизны.

2399. Через точку на поверхности проводятся n нормальных сечений, где угол между последовательными сечениями равен $\frac{2\pi}{n}$. Доказать, что арифметическая средняя кривизны сечений не зависит ни от числа n, ни от направления первого сечения ($n \geqslant 2$).

2400. Линия на поверхности, образующая с плоскостью xOy в каждой своей точке наибольший из углов, какой в этой точке возможен на поверхности, называется линией наибольшего ската. Доказать, что касательная к ней, нормаль к поверхности и линия, идущая через данную точку параллельно Oz, лежат в одной плоскости.

2401. Доказать, что проекции на плоскость xOy горизонталей поверхности пересекаются под прямым углом с проекциями линий наибольшего ската.

2402. Доказать, что кривые, проекции которых на плоскость xOy имеют уравнение $x^{a^2}=Cy^{b^2}$, где C — постоянная, являются линиями наибольшего ската для эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2403. Две поверхности

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

уравнения которых отличаются величиной λ, являются софокусными. Доказать, что линии пересечения эллипсоида с софокусными ему одно- и двуполостным гиперболоидами будут линиями кривизны для эллипсоида.

2404. Доказать, что у геликоида задачи 2385 вдоль каждой линии кривизны одна из величин $\ln(u+\sqrt{u^2+m^2})\pm v$ остается постоянной.

2405. Линия на поверхности, главная нормаль к которой повсюду совпадает с нормалью к поверхности, называется геодезической. Показать, что на поверхности шара геодезической линией является дуга большого круга.

2406. Показать, что на поверхности

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=a\sin u\cos v,\quad z=a\ln\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-a\sin v$$

для точек геодезической линии выполняется условие:

$$\frac{du}{dv}=\frac{\sqrt{c\sin v}}{\cos^2 v\,\sqrt{a^2\cos^2 v-c^2}},$$

где c — постоянное.

2407. Найти аналогичное условие для геодезических линий поверхности вращения $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=f(r)$.

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Комплексные числа

Представить в тригонометрической форме числа:

2408. $1+i$. **2409.** $1+i\sqrt{3}$. **2410.** $\sqrt{3}-i$.

2411. $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$; $0<\alpha<2\pi$. **2412.** $1+\sin\alpha-i\cos\alpha$.

2413. $1+i\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Вычислить следующие выражения, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$:

2414. $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$.

2415. $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

2416. $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$.

Вычислить квадратные корни из чисел:

2417. $\sqrt{i}$. **2418.** $\sqrt{3+4i}$. **2419.** $\sqrt{-7+24i}$.

Решить квадратные уравнения:

2420. $x^2+(5-2i)x+5(1-i)=0$.

2421. $x^2+(1-2i)x-2i=0$.

Найти все значения следующих корней:

2422. $\sqrt[3]{i}$. **2423.** $\sqrt[3]{-1+i}$. **2424.** $\sqrt[6]{-64}$. **2425.** $\sqrt[6]{64}$.

Найти корни уравнений:

2426. $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$. **2427.** $(x+i)^n+(x-i)^n=0$.

Выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции:

2428. $\cos 3\varphi$. **2429.** $\sin 3\varphi$. **2430.** $\cos 4\varphi$. **2431.** $\sin 5\varphi$.

Выразить через тригонометрические функции кратных углов следующие функции:

2432. $\cos^3\varphi$. **2433.** $\sin^3\varphi$. **2434.** $\cos^4\varphi$.

2435. $\sin^4\varphi$. **2436.** $\cos^5\varphi$. **2437.** $\sin^5\varphi$.

Доказать равенства:

2438. $\operatorname{tg} n\varphi = \dfrac{C_n^1 \operatorname{tg}\varphi - C_n^3 \operatorname{tg}^3\varphi + C_n^5 \operatorname{tg}^5\varphi - \ldots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2\varphi + C_n^4 \operatorname{tg}^4\varphi - \ldots}$,

$C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$.

2439. $2^{2n}\cos^{2n}\varphi = 2\cos 2n\varphi + 2C_{2n}^1\cos(2n-2)\varphi + \ldots$

$$\ldots + 2C_{2n}^{n-1}\cos 2\varphi + C_{2n}^n.$$

2440. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots +$
$+ \operatorname{ctg}\left(x + \frac{n-1}{n}\pi\right) = n \operatorname{ctg} nx.$

2441. $\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}.$

Вычислить суммы:

2442. $1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx$.

2443. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x$.

2444. $\cos\varphi + a\cos 3\varphi + \ldots + a^n\cos(2n+1)\varphi$.

2445. $1 + 2a\cos\varphi + 2a^2\cos 2\varphi + \ldots + 2a^n\cos n\varphi$.

Найти величины:

2446. $\ln(-e)$. **2447.** $\ln(-2)$. **2448.** $\ln i$. **2449.** $\ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2450. $\ln(x+iy)$. **2451.** $e^{\pi i}$. **2452.** i^i. **2453.** 2^i.

2454. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$ **2455.** $\operatorname{tg}\frac{\pi i}{2}$. **2456.** $\sin(x+iy)$

2457. $\cos(x+iy)$. **2458.** $\operatorname{arctg} xi$.

2459. При каком условии точка $z = x + iy$ лежит внутри круга радиуса R с центром в точке $c = a + bi$?

2460. В круг с радиусом R и с центром в точке $c = a + bi$ вписан правильный n-угольник, одна из вершин которого — в точке $z_0 = a + (b+R)i$. Где остальные вершины?

2461. Две вершины правильного треугольника — в точках $z_0 = 1$ и $z_1 = 2 + i$. Найти третью вершину.

2462. Две смежные вершины правильного n-угольника — в точках z_0 и z_1. Найти следующую вершину.

2463. Вершины многоугольника — в точках $z_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1}$, $|z| < 1$. Выяснить, находится ли точка $z = 0$ внутри многоугольника.

2464. Три последовательные вершины параллелограмма — в точках z_1, z_2, z_3. Найти положение четвертой вершины.

2465. Концы отрезка — в точках z_1 и z_2. Найти середину.

2466. Массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Найти положение центра тяжести.

2467. Точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — вершины выпуклого n-угольника. Найти геометрическое место точек $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n$, где $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

2468. Последовательные вершины ломаной лежат в точках

$$z_k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-1} z^{k-1},$$
$$|z| \leqslant 1; \quad a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{k-1} > 0.$$

Доказать, что ломаная не может замкнуться ни при каком значении k.

2469. Доказать, что уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$$

не может иметь корней, бóльших по модулю единицы.

2470. Доказать, что равенства $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вещественны, эквивалентны условию, чтобы точки z_1, z_2, z_3 лежали на одной прямой.

2471. Доказать тождество:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

и указать его геометрический смысл.

2472. Доказать равносильность равенств

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 \text{ и } z_2 - z_0 = \lambda i (z_1 - z_0),$$

где λ вещественно.

Доказать равенства:

2473. $2|z_1| + 2|z_2| = |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}|$.

2474. $|x + y| + |x - y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|$.

Определить вид кривых, заданных следующими уравнениями, в которых t — вещественный параметр:

2475. $z = z_0 + te^{\alpha i}, \quad z_0 = x_0 + iy_0$.

2476. $z = z_0 + re^{ti}$.

2477. $z = z_0 + ae^{ti} + be^{-ti}$.

2478. $z = ate^{ti}$.

2479. $z = ae^{\alpha t}$, a и α — комплексные постоянные.

2480. Проследить, как изменяется аргумент величины $x(x-1)$, когда x описывает в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки, замкнутую кривую, заключающую внутри точки 0 и 1.

2481. Изучить изменение аргумента величин $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-1}$ и $\sqrt{x(x-1)}$, когда x описывает тот же контур, что и в 2480.

2482. Как изменится функция $u=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}$ при вещественных α и β, если z опишет замкнутый контур, обходящий против часовой стрелки точки a и b?

2483. Тот же вопрос для функции $u=(z-a)^{\alpha}\ln(z-a)$ и контура, обходящего точку a против часовой стрелки.

§ 2. Разложение полинома на множители, связь между коэффициентами и корнями

2484. Определить a и b так, чтобы x^4+3x^2+ax+b делилось без остатка на $x^2-2ax+2$.

2485. Показать, что при целых m, n и p полином $x^{3m}+x^{3n+1}+$ $+x^{3p+2}$ делится на x^2+x+1.

2486. Доказать, что $(x+y)^n-x^n-y^n$ при $n=6m+5$ делится на x^2+xy+y^2, а при $n=6m+1$ делится на $(x^2+xy+y^2)^2$.

2487. Уравнение $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0$ имеет корень $1+i$. Найти остальные корни.

2488. Доказать, что двойной корень уравнения $\varphi(x)^2+\psi(x)^2=0$ удовлетворяет уравнению $\varphi'(x)^2+\psi'(x)^2=0$, если полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ взаимно простые.

2489. Доказать, что корень кратности n уравнения $F[u(x), v(x)]=0$ есть корень кратности $n-1$ уравнения $F[u'(x), v'(x)]=0$. Здесь $u(x)$, $v(x)$ — взаимно простые полиномы и $F(u, v)$ — однородная функция, не имеющая кратных линейных множителей.

2490. Доказать, что полином $f(x)$ тогда и только тогда остается положительным при всех вещественных x, когда

$$f(x)=|\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n|^2,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые комплексные числа.

Доказать тождества:

2491. $$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

2492. $$x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right).$$

2493. $$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right).$$

2494. $$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1\right).$$

2495. $$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

2496. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

2497. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$.

2498. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}$ или $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}$, при нечетном или четном n соответственно.

2499. $\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$.

2500. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

2501. $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Разложить на множители полиномы:

2502. $(x+1)^n+(x-1)^n$.

2503. $x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}(x^2-1)+C_{2n}^4x^{2n-4}(x^2-1)^2+\ldots+(x^2-1)^n$.

2504. $x^{2n+1}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}(x^2-1)+C_{2n+1}^4x^{2n-3}(x^2-1)^2+\ldots+x(x^2-1)^n$.

2505. Вычислить произведение $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, ($a_1, \ldots, a_n$ вещественные).

2506. Корни полинома $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ связаны соотношениями $x_s+x_{n-s}=m$, $s=1, 2, \ldots, n$. Доказать тождество: $f(x)=(-1)^nf(m-x)$.

2507. Корни полинома $f(x)$ степени $2n$ связаны соотношением $x_s+x_{n+s}=2m$, $s=1, 2, \ldots, n$. Доказать, что один из корней $f'(x)$ равен m, а остальные попарно связаны формулами $y_s+y_{n+s-1}=2m$, $s=1, 2, \ldots, n-1$.

2508. Уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, где $a_0a_n\neq 0$, имеет $k+1$ член. Показать, что оно не может иметь корней кратности выше, чем k.

2509. Делится ли на $(x-1)^4$ многочлен $x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$?

2510. Найти зависимость между коэффициентами полинома $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, если между его корнями имеется зависимость: $x_1x_2+x_2x_3=2x_1x_3$.

2511. Найти зависимость между p, q и r, при которой корни уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$ составляют геометрическую прогрессию.

2512. При каких λ и μ корни уравнения $x^4+2x^3-21x^2+\lambda x+\mu=0$ образуют арифметическую прогрессию и какую именно?

2513. При каких p, q α $(0<\alpha<4)$ уравнение $x^4+px^\alpha+q=0$ имеет тройной корень?

2514. Остатки от деления полинома на $x-a$, $x-b$, $x-c$ равны A, B, C. Найти остаток от деления на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

2515. Корни полинома x^3+x^2-2 равны 1, α и β. Найти полином $\varphi(x)$ второй степени, для которого $\varphi(1)=1$, $\varphi(\alpha)=\beta$, $\varphi(\beta)=\alpha$, и доказать, что $\varphi(\varphi(x))-x$ делится на x^3+x^2-2.

2516. Найти полином $f(x)$ седьмой степени, такой, чтобы $f(x)+1$ делилось на $(x-1)^4$, а $f(x)-1$ делилось на $(x+1)^4$.

2517. Найти полином $f(x)$ степени $2n-1$, такой, чтобы $f(x)+1$ делилось на $(x-1)^n$, а $f(x)-1$ на $(x+1)^n$.

2518. Найти полином степени n, который при делении на $x-a_1$, $x-a_2, \ldots, x-a_n$ дает остатки $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2519. Доказать справедливость тождества Эйлера $\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\omega(x_k)}{\varphi'(x_k)}=0$, где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$, числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ различны, а $\omega(x)$ — любой полином, степени не выше, чем $m-2$.

2520. В равенстве

$$\ln(1-\lambda z)+\ln(1-z\lambda^{-1})=\ln[1-(\lambda+\lambda^{-1})z+z^2]$$

обе части можно разложить по степеням z, если числа $|\lambda z|$, $|z\lambda^{-1}|$ и $|(\lambda+\lambda^{-1})z-z^2|$ меньше чем единица. Приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях z, доказать тождество:

$$\lambda^n+\lambda^{-n}=t^n-nt^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}t^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-6}+\ldots,$$ где $t=\lambda+\lambda^{-1}$.

2521. Полагая в тождестве предыдущей задачи $\lambda=\cos\varphi+i\sin\varphi$ для полинома Чебышева $T_n(x)=2^{-(n-1)}\cos(n\arccos x)$, получить явное выражение

$$T_n(x)=x^n-\frac{nx^{n-2}}{2}+\frac{n(n-3)}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{n-4}}{2}-\frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{n-6}}{2^2}+\ldots$$

2522. Учитывая характер изменения полинома $T_n(x)$ в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$, доказать, что всякий другой полином $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с вещественными коэффициентами не может постоянно оставаться по абсолютной величине меньше, чем $2^{-(n-1)}$, т. е. что полином Чебышева наименее уклоняется от нуля в интервале $(-1,1)$.

2523. $F(x)=f(x)\varphi(x)^k$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — взаимно простые полиномы без кратных корней. Положив $F(x)=P(x)Q(x)$, $F'(x)=P(x)R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ взаимно простые, доказать, что $\varphi(x)$ есть общий наибольший делитель полиномов $Q(x)$ и $R(x)-kQ'(x)$ (Остроградский).

§ 3. Полином с вещественными коэффициентами. Теорема Ролля

2524. При каких λ все корни полинома $x^3-3x+\lambda$ вещественны?

2525. Многочлены

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$
$$\psi(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$$

имеют корни: $a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots<a_n<b_n$ вещественные и перемежающиеся. Доказать, что при $\lambda>0$ корни полинома $\varphi(x)+\lambda\psi(x)$ вещественны и перемежаются с корнями полиномов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

2526. При тех же условиях и $\mu>\lambda>0$ доказать, что корни уравнений $\varphi(x)+\lambda\psi(x)=0$, $\varphi(x)+\mu\psi(x)=0$ вещественные, простые и взаимно перемежающиеся.

2527. Доказать, что при тех же условиях корни уравнения $\varphi(x)+\lambda\psi(x)=0$ возрастают вместе с λ.

2528. При каких значениях p и q уравнение $x^5+px+q=0$ имеет три вещественных корня?

2529. Доказать, что уравнение $x^m=1+\alpha x^{m+n}$, где m и n нечетные, $\alpha>0$, имеет при $(m+n)^{m+n}\alpha^m<m^m n^n$ два положительных корня.

2530. Доказать, что при вещественности корней уравнения $x^3-3px+q=0$, $p>0$ каждый из них по модулю меньше, чем $2\sqrt{p}$. Если же корни x_2 и x_3 мнимые, то $|x_1|>\sqrt{2p}$.

2531*. Доказать, что уравнение $x^{\lambda_1}+a_1x^{\lambda_2}+\ldots+a_n=0$, где $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_{n-1}>0$, $a_1a_2\ldots a_n\neq 0$, не может иметь более чем n положительных корней.

2532*. Доказать, что полином $x^n+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\ldots+a_{m-1}x^{n_{m-1}}+a_m$, где $n>n_1>n_2>\ldots>n_{m-1}$ — целые числа, $a_1a_2\ldots a_m\neq 0$, не может иметь более чем $2m$ вещественных корней.

2533. Доказать, что все корни уравнения $\dfrac{d^m x^m(x-1)^m}{dx^m}=0$ — положительные правильные дроби.

2534*. Все корни полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ — вещественные, S — целое. Доказать, что и все корни полинома $(n+1)^s a_0x^n+n^s a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ тоже вещественны.

2535*. Доказать, что все корни полинома $(m+1)^{m-1}x^m+m^m x^{m-1}+\dfrac{m(m-1)^m}{1\cdot 2}x^{m-2}+\ldots+1=0$ лежат в интервале $(-1, 0)$.

2536*. Все корни полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ вещественные. Доказать, что корни уравнения $a_sx^k+C_k^1a_{s+1}x^{k-1}+C_k^2a_{s+2}x^{k-2}+\ldots+a_{s+k}=0$, $s+k\leqslant n$, тоже вещественные.

---

* См. указание в „Ответах“.

2537*. При том же условии доказать неравенства: $a_k^2 \geqslant a_{k-1}a_{k+1}$; $(a_k a_{k+3} - a_{k+1}a_{k+2})^2 \leqslant 4(a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2})(a_{k+2}^2 - a_{k+1}a_{k+3})$.

2538*. Корни полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны и различны. Доказать, что у полинома $nf(x)f''(x) - (n-1)f'(x)^2$ все корни мнимые.

2539*. Все корни полинома $f(x)$ вещественные. Доказать, что корни полинома $f(x) + \lambda f'(x)$ тоже вещественные, если λ вещественно.

2540*. При том же условии дано, что полином $f(x) + m$ имеет k мнимых корней. Доказать, что уравнение $f'(x)^2 - f(x)f''(x) - mf''(x) = 0$ имеет не менее чем k вещественных корней.

Доказать теоремы:

2541*. Если все корни полинома $f(x)$ вещественные, то при $\lambda > 0$ и все корни полинома $xf'(x) + \lambda f(x)$ тоже вещественные. (Лагерр.)

2542*. Если у полинома $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ все корни вещественные, а у полинома $\varphi(\nu)$ они $\leqslant 0$, то и у полинома $F(x) = \sum a_\nu \varphi(\nu) x^\nu$ все корни вещественные (Лагерр).

2543*. Если у полинома $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ все корни вещественны, то вещественны и все корни полинома $F(x) = \sum a_\nu \psi(\nu) x^\nu$, где функция $\varphi(\nu)$ выражается произведением $e^{A\nu} \prod \left(1 + \frac{\nu}{\alpha_\nu}\right) e^{-\frac{\nu}{\alpha_\nu}}$, числа α положительны, A вещественны (Лагерр).

2544*. Если корни полинома $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$ и точка $x = 0$ лежат внутри некоторого выпуклого контура, то внутри того же контура лежат и корни полинома $F(x) = \sum a_\nu \psi(\nu) x^\nu$, где $\psi(\nu) = e^{A\nu} \prod \left(1 + \frac{\nu}{\alpha_\nu}\right) e^{-\frac{\nu}{\alpha_\nu}}$, числа $\alpha_\nu > 0$, $A < 0$.

2545*. Корни полиномов $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$, где $f(x)$ — полином степени n, лежат внутри любого выпуклого контура, внутри которого лежат корни $f(x)$.

2546*. Если функция $\Phi(x) = f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) + \ldots + a^n f^{(n)}(x)$, где $f(x)$ — полином степени n, имеет корни вещественные, то и полином $f(x)$ — тоже.

2547*. Если корни полинома $f(x) = P(x) + iQ(x)$, где полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ имеют вещественные коэффициенты, лежат по одну сторону вещественной оси, то корни уравнений $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ вещественные и перемежающиеся (Эрмит).

2548. Применяя теорему Ролля к функции $x^m e^x$, доказать, что уравнение

$$x^m + \frac{m}{1^2} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^{m-2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} = 0$$

имеет все корни вещественные.

---

* См. указание в «Ответах».

Доказать вещественность корней уравнений:

2549*. $x^n + \left(\frac{n}{1}\right)^m x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^m x^{n-2} + \ldots + 1 = 0;$
$m = 1, 2, 3, \ldots$

2550*. $(1+x^2)^{n+1}\frac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n} = 0.$

2551*. $x^{2n} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = 0.$

2552*. $\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} = 0,\ A_\nu > 0,$
$a_1 < a_2 <, \ldots < a_n.$

2553*. $\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} = 0,\quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$
$A_\nu > 0$ при $\nu < m$, $A_\nu < 0$ при $\nu \geqslant m$, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0.$

2554*. Доказать, что корни полинома Эрмита—Чебышева $e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ вещественны и лежат в интервале $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$.

Сколько вещественных корней имеют уравнения:

2555. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0.$

2556. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} = 0.$

2557* В разложении по степеням λ: $\frac{\operatorname{sh}\lambda + x\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\lambda^n$ коэффициент $\varphi_n(x)$ при λ^n есть полином степени $n+1$. Доказать, что все корни $\varphi_n(x)$ лежат в интервале $(-1, 1)$ (Эрмит).

2558*. Найти верхнюю границу для числа положительных и отрицательных и нижнюю границу для числа мнимых корней уравнения $x^{10} - 7x - 2 = 0$.

2559*. В уравнении $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ при некотором k имеется равенство: $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$. Показать, что среди корней имеются мнимые.

2560*. В таком же уравнении четыре последовательных коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что уравнение имеет мнимые корни (Эрмит).

2561*. Доказать, что уравнение

$$f(n)x^n + f(n-1)x^{n-1} + \ldots + f(0) = 0,$$

где $f(\nu)$ — полином степени не выше, чем $n-2$, имеет мнимые корни.

* См. указание в «Ответах».

2562*. Доказать, что при вещественных a и b уравнение

$$x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+ab+b^2)x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)=0$$

имеет не больше одного вещественного корня.

§ 4. Рациональные дроби. Разложение на простейшие

Разложить следующие дроби на простейшие:

2563. $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$.

2564. $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

2565. $\dfrac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}$.

2566. $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$.

2567. $\dfrac{4}{(x^2-1)^2}$.

2568. $\dfrac{x^6-x^2+1}{(x-1)^3}$.

2569. $\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$.

2570. $\dfrac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}$.

2571. $\dfrac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$.

2572. $\dfrac{8}{x^4+4}$.

2573. $\dfrac{2x^4}{x^4+x^2+1}$.

2574. $\dfrac{x^{m-1}}{x^n-1}$; $m\leqslant n$.

2575. $\dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}$.

2576. $\dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

2577. $\dfrac{1}{x^{2n+1}+1}$.

2578. $\dfrac{3x^3+15x+6}{x^4+x^3+3x^2+2x+2}$.

2579. $\dfrac{2x^3+4x}{x^4+x^2+4}$.

2580. $\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$.

2581. Определить коэффициенты в разложении функции $f(x)=$ $=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$ по убывающим степеням x, если корни знаменателя простые.

2582. Найти сумму ряда $\sum u_n^2x^n$, где

$$\frac{x+a}{x^2+2ax+1}=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots$$

2583. Если x_1 по абсолютной величине больше остальных корней уравнения $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, то $x_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, где u_n — коэффициент при x^{-n} в разложении дроби $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\sum u_nx^{-n}$, если $\varphi(x_1)\neq 0$. Числа u_n можно находить последовательно из равенства: $u_{s+n}+a_1u_{s+n-1}+\ldots+a_nu_s=0$.

2584*. Разложение в ряд правильной рациональной дроби имеет вид $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots$, где числа u_n имеют значения 0 и ± 1. Доказать, что

$$\psi(x) = 1 - x^m, \quad \varphi(x) = a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m,$$

где числа a_ν могут иметь лишь значения 0 и ± 1 (Лагерр).

2585*. Доказать равенство

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2},$$

где x_ν — корни уравнения $x^n = 1$, отличные от единицы.

2586*. Все корни уравнения $f(x) = 0$ степени n — вещественные. Доказать, что в промежутке $\left(-\frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{n} + x_\nu, \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{n} + x_\nu\right)$, где $x_{\nu-1}$, x_ν, $x_{\nu+1}$ — три последовательных корня $f(x)$, нет корней $f'(x)$.

2587*. Все корни полинома $f(x)$ степени n — вещественные, как и число m. Доказать, что модуль мнимой части каждого из корней уравнения $f(x) + imf'(x) = 0$ меньше, чем $|nm|$.

§ 5. Определители. Системы линейных уравнений

Вычислить определители:

2588. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. **2589.** $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 11 & -2 & 10 \\ 2 & -14 & -5 \end{vmatrix}$. **2590.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2591. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **2592.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **2593.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$.

2594. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$. **2595.** $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

2596. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$. **2597.** $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

---

* См. указание в „Ответах“.

2598. $\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix}$. **2599.** $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$. **2600.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

2601. Найти величину определителя Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

предполагая сначала, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны между собой.

2602. Вычислить определители Δ_n и Δ_{n+1}, получающиеся из определителя Вандермонда заменой в последней строчке показателя $n-1$ на n или на $n+1$.

2603. Вычислить величины Δ_1 и Δ_2 определителей, получающихся из определителя Вандермонда Δ дифференцированием по x_1 и заменой x_1на x_2 или x_1 и x_2 на x_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 2x_2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x_2^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & x_3 & \dots & x_n \\ 2 & 2x_3 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1)x_3^{n-2} & (n-1)x_3^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2604. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{1!\,2!\,3!\dots(n-1)!},$$

где $\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1\cdot 2\dots m}$, Δ — определитель Вандермонда.

Вычислить определители:

2605. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$.

2606. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}$. **2607.** $\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix}$.

2608. $\begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^2\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta & \sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma & \sin^2\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\cos^2\gamma & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta & \sin^2\delta\cos\delta & \sin\delta\cos^2\delta & \cos^3\delta \end{vmatrix}$.

Доказать равенства:

2609. $D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}$; $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix}$.

2610. $\begin{vmatrix} a_1 & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & a_2 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & \lambda & & a_n \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) - \lambda\frac{d\varphi}{d\lambda}$,

где $\varphi(\lambda) = (a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\ldots(a_n-\lambda)$,

2611*. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)$,

где $\varphi(\alpha) = a_1 + a_2\alpha + \ldots + a_n\alpha^{n-1}$; α — корень уравнения $\alpha^n = 1$.

2612. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$.

2613*. Доказать неравенство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & B_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 & m_3 & \ldots & M_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $A_1 > |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$, $B_2 > |b_1| + |b_3| + \ldots + |b_n|$, $M_n > |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_{n-1}|$.

2614. Доказать, что предыдущий определитель положителен, если, при тех же условиях, его элементы вещественны.

2615. Доказать, что определитель, у которого элементы $a_{\nu\mu}$ и $a_{\mu\nu}$, симметричные относительно главной диагонали, — комплексные сопряженные, имеет вещественное значение.

2616. Элементы определителя порядка n связаны равенствами $a_{\nu\nu}=0$, $a_{\nu\mu}=ia_{\mu\nu}$, $\nu>\mu$, где $a_{\mu\nu}$ — вещественное число. Найти значения n, при которых определители имеют вещественное значение при любом выборе $a_{\mu\nu}$.

2617. При каких n тот же определитель равен чисто мнимому числу?

2618. Показать, что при нечетных n тот же определитель равен $A(1\pm i)$, где A — вещественное.

2619. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}=0,\ n>2.$$

2620. Найти величину определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

элементы которого — косинусы углов новых осей со старыми; координатные системы предполагаются прямоугольными.

2621. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

элементы которого суть проекции трех векторов на оси, не меняется при преобразовании прямоугольных координат.

Решить системы уравнений:

2622. $$\begin{aligned} 2x \qquad\; - z &= 1, \\ 2x+4y-z &= 1, \\ -x+8y+3z &= 2. \end{aligned}$$

2623. $$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x+(1+a)y+z &= 2a, \\ x+y+(1+a)z &= 0. \end{aligned}$$

2624. $$\begin{aligned} x+2y+z+t &= 0, \\ 2x+y+z+2t &= 0, \\ x+2y+2z+t &= 0, \\ x+y+z+t &= 0. \end{aligned}$$

2625. $$\begin{aligned} 5x+4z+2t &= 3, \\ x-y+2z+t &= 1, \\ 4x+y+2z &= 1, \\ x+y+z+t &= 0. \end{aligned}$$

2626. $$\begin{aligned} x-4y+2z &= -1, \\ 2x-3y-z-5t &= -7, \\ 3x-7y+z-5t &= -8, \\ y-z-t &= -1. \end{aligned}$$

2627. Из системы уравнений $x+y+2z=0$, $2x-y+z=0$, $x+y+z=t$, $2x-2y+z=u$ найти u как функцию от t.

Решить системы:

2628.
$$\begin{aligned} &x_1+\ x_2+\ x_3+\ldots+\ x_n=n,\\ &x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=\frac{n(n+1)}{2},\\ &x_1+3x_2+6x_3+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_1+nx_2+\frac{n(n+1)}{2}x_3+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1\cdot2\ldots(n-1)}x_n=\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}. \end{aligned}$$

2629.
$$\begin{aligned} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n&=1,\\ x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n&=2,\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n&=3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}&=n. \end{aligned}$$

2630. Показать, что в том случае, когда определитель Δ, составленный из n^2 элементов $a_{\mu\nu}$, равен нулю, имеет место пропорциональность $\frac{A_{1\mu}}{A_{1\nu}}=\frac{A_{2\mu}}{A_{2\nu}}=\cdots=\frac{A_{n\mu}}{A_{n\nu}}$, где A_{kl} — алгебраическое дополнение элемента a_{kl}.

2631. Решить систему уравнений: $a_{\nu1}x_1+a_{\nu2}x_2+\ldots+a_{\nu n}x_n=\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, предполагая, что таблица, составленная из коэффициентов этих уравнений, — ортогональная. Найдя решение, показать, что $A_{\nu\mu}=a_{\nu\mu}\cdot\Delta$, где $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\nu\mu}$.

2632*.
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}\neq 0,$$

а все определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} (m>p,\ n>p),$$

---

* См. указание в „Ответах".

содержащие Δ как минор, равны нулю. Доказать, что ранг матрицы равен p.

2633. При каком условии три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой?

2634. При каком условии три прямые

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0,\ a_3x+b_3y+c_3=0$$

пересекаются в одной точке?

2635. При каком условии четыре точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежат в одной плоскости?

2636. При каком условии n точек $M_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, лежат в одной плоскости и при каком лежат на одной прямой?

2637. При каких условиях n плоскостей $A_\nu x+B_\nu y+C_\nu z+D_\nu=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, пересекаются в одной точке или по одной прямой?

§ 6. Матрицы. Характеристическое уравнение. Квадратичные формы

2638. Величина λ равна наибольшему положительному корню характеристического уравнения матрицы $\|a_{ik}\|$ с положительными элементами. Каковы знаки решений системы $\lambda x_\nu=a_{\nu 1}x_1+a_{\nu 2}x_2+\ldots+a_{\nu n}x_n$, $\nu=1, 2, \ldots, n$?

2639. Найти вид элементов прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

ранг которой равен единице.

2640. Показать, что матрица ранга r может быть представлена в виде суммы r матриц ранга единица. Какое следствие для билинейных форм вытекает отсюда?

2641. Если A_1 и B_1 — транспонированные матрицы A и B, то $(AB)_1=B_1A_1$. Доказать.

2642. Найти правила действий для гиперкомплексных чисел вида $q=ae+bi+cj+dk$, где e, i, j и k обозначают следующие матрицы:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{pmatrix},$$

$$j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad k=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

2643. Найти вид матрицы, перестановочной с любой матрицей.

2644. В каком случае матрица A линейного преобразования $y_\nu=a_{\nu 1}x_1+a_{\nu 2}x_2+\ldots+a_{\nu n}x_n$ удовлетворяет условию $AA_1=E$, где E — единичная матрица, а A_1 — транспонированная матрица A?

2645. Найти вещественные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

при условии, что $a_{\nu\mu} = -a_{\mu\nu}$ и все $a_{\nu\mu}$ — вещественные.

2646. Доказать, что характеристическое уравнение ортогональной матрицы возвратное, т. е. его корни связаны попарно зависимостями $x_\nu x_{n-\nu} = 1$.

2647. Квадратичная форма $\sum\limits_{\mu=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ — определенная, а число λ заключается между наибольшим и наименьшим корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}+xb_{11} & a_{12}+xb_{12} & \dots & a_{1n}+xb_{1n} \\ a_{21}+xb_{21} & a_{22}+xb_{22} & \dots & a_{2n}+xb_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+xb_{n1} & a_{n2}+xb_{n2} & \dots & a_{nn}+xb_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказать, что квадратичная форма $\sum\limits_{\mu=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu}+\lambda b_{\mu\nu})\ x_\mu x_\nu$ — неопределенная. Здесь x_μ и x_ν — независимые переменные.

2648*. Доказать, что корни характеристического уравнения матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$ имеют вещественную часть, заключающуюся между наибольшим и наименьшим корнями характеристического уравнения симметрической матрицы с элементами $b_{\mu\nu}$, где $2b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$. При этом все $a_{\mu\nu}$ — вещественные.

2649. Найти границы величины вещественной части корня характеристического уравнения кососимметрической матрицы с вещественными элементами.

2650. Доказать, что корень s характеристического уравнения матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$ меньше по модулю, чем наибольший положительный корень σ матрицы с элементами $|a_{\mu\nu}|$.

2651. Доказать, что наибольший из положительных корней характеристического уравнения матрицы с положительными элементами больше по модулю, чем любой другой корень того же уравнения.

2652*. Доказать, что наибольший корень характеристического уравнения матрицы с положительными элементами $a_{\mu\nu}$ больше по модулю, чем любой корень характеристического уравнения матрицы с элементами $b_{\mu\nu} = \sqrt{a_{\mu\nu}a_{\nu\mu}}$.

2653. Показать, что корни характеристического уравнения матрицы с положительными элементами $a_{\mu\nu}$ по модулю меньше наибольшего корня характеристического уравнения матрицы с элементами $b_{\mu\nu}$, где $2b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$.

---

* См. указание в „Ответах“.

2654. Элементы матрицы $\|(b_{\mu\nu})\|$ определяются по формулам: $b_{\mu+1,\nu}=b_{\mu1}a_{1\nu}+b_{\mu2}a_{2\nu}+\ldots+b_{\mu n}a_{n\nu}$; $\mu=1, 2, \ldots, n$, где b_{11}, $b_{12}, \ldots, b_{1n}$ и $a_{\mu\nu}$ — данные числа. Найти величину произведения определителей

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix}.$$

2655. Найти элементарные делители матрицы

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

2656. То же для матрицы

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 30 & -48 \\ 3 & 14-\lambda & -24 \\ 3 & 15 & -25-\lambda \end{pmatrix}.$$

2657. Исследовать эквивалентность матриц

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

2658. Показать, что матрица $\|(a_{\mu\nu})\|$, будучи подставлена вместо x в характеристическое уравнение той же матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

ему удовлетворяет.

2659. Составить элементарные делители матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix},$$

приведя ее к каноническому виду путем элементарных преобразований.

2660. $M(b_1, b_2, \ldots; b_n)$ — двойная точка квадратичной формы

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu} \qquad (a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}),$$

обращающейся в нуль в точке $N(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Найти значение формы в точках прямой MN.

Представить в виде суммы квадратов следующие квадратичные формы:

2661. $4xy + 4xz + 4yz$.

2662. $8x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6yz + 4xz - 2xy$.

2663. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 31v^2 - 2xy + 2xz + 10xv - 6yz + {}$ $+ 2yv + 6zv$.

2664. Квадратичная форма $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ посредством линейного преобразования $x_\mu = c_{\mu 1} y_1 + c_{\mu 2} y_2 + \ldots + c_{\mu n} y_n$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, преобразована в квадратичную форму $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} y_\mu y_\nu$. Найти линейное преобразование, переводящее форму, союзную первой, в форму, союзную второй.

2665. Формы $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ положительны. Доказать, что и форма $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ положительна.

§ 7. Симметрические функции

2666. Пользуясь основной теоремой о симметрических функциях, доказать, что целая рациональная симметрическая функция степени m от корней уравнения $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ рационально выражается через $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

2667. Пользуясь результатом предыдущей задачи, доказать, что суммы степеней корней уравнений $S_1, S_2, \ldots, S_m$ у уравнений $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ и $x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + {}$ $+ \ldots + p_m = 0$ одни и те же. Здесь $m \leqslant n$.

2668. Опираясь на результат двух предыдущих задач, доказать, что при $m \leqslant n$ для сумм степеней корней уравнения справедлива формула:

$$S_m + p_1 S_{m-1} + \ldots + p_{m-1} S_1 + m p_m = 0.$$

2669. Умножая на подходящую степень x левую часть уравнения $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$, получить равенство для сумм степеней корней уравнения при $m > n$:

$$S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \ldots + p_n S_{m-n} = 0.$$

Найти значения указанных симметрических функций корней данных уравнений:

2670. $x^5 - 3x^3 - 5x + 1 = 0$; $\sum x_\nu^4$.

2671. $x^3+3x^2-x-7=0$; $\sum x_\nu^6$.

2672. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$; $\sum x_\nu^3 x_\mu$; $\nu \neq \mu$.

2673. $x^3-x-1=0$; $\sum x_1(x_2-x_3)^2$.

2674. $x^4-5x^2-2x+1=0$; $\sum (x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2$.

2675. $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1=0$; $\sum x_1^3x_2^3x_3^3$; $n>8$.

2676. $x^5-4x^3+x^2+3x+1=0$; $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

2677. $x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+ab+b^2)x^{n-2}+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)=0$; найти S_m при $m \leqslant n$.

2678. $x^n+ax^{n-1}+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}x^{n-2}+\ldots+$

$$+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}=0;\quad S_m,\ m\leqslant n+1.$$

2679. Доказать формулы Варинга, дающие выражения для S_m, суммы m-х степеней корней уравнений $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0$, через коэффициенты уравнения. Эти формулы можно написать в таком виде:

$$\frac{1}{m}S_m=p_n-\frac{1}{2}\sum{}' p_\nu p_\mu+\frac{1}{3}\sum p_\nu p_\mu p_\lambda-\ldots,$$

$$p_m=-\frac{S_m}{m}+\frac{1}{2!}\sum\frac{S_\mu S_\nu}{\mu\nu}-\frac{1}{3!}\sum\frac{S_\mu S_\nu S_\lambda}{\mu\nu\lambda}+\ldots$$

В каждой из сумм в правой части индексы μ, ν, λ, ... положительны, а их сумма равна m.

Для кубичного уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ вычислить следующие симметрические функции:

2680.
$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_1^2+x_3^2}{x_1+x_3}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3};$$

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2+x_1x_3}{x_1+x_3}+\frac{x_3^2+x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

2681. Площадь треугольника со сторонами x_1, x_2, x_3.

Представить в виде целой функции от x следующие дробные функции корня данного уравнения (уничтожение иррациональности в знаменателе):

2682. $\frac{6+5x}{1+x+x^2}$; $x^3-2=0$. **2683.** $\frac{1}{x^3-x+2}$; $x^4-5=0$.

2684. $\frac{1}{1+2x+x^2}$; $x^3-x-1=0$. **2685.** $\frac{1}{a+bx+cx^2}$; $x^3-N=0$.

Узнать, имеют ли общий корень полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

2686. $\varphi(x)=x^3-3x^2+x+1$, $\psi(x)=2x^3-4x+2$.

2687. $\varphi(x)=x^2+x+1, \qquad \psi(x)=x^3+x-1.$

2688. $\varphi(x)=x^5+x^2+1, \qquad \psi(x)=x^5-x^3+2.$

2689. При каких λ и μ уравнения

$$x^3-6x^2+\lambda x-3=0, \quad x^3-x^2+\mu x+2=0$$

имеют два общих корня?

Решить системы уравнений:

2690. $5x^2-5y^2-3x+9y=0,$
$5x^3+5y^3-15x^2-13xy-y^2=0.$

2691. $3x^3+9x^2y+9xy^2+3y^3+2x^2-4xy+2y^2=5,$
$4x^3+12x^2y+12xy^2+4y^3-x^2+2xy-y^2=3.$

Исключить x из систем уравнений:

2692. $x^3+(y-1)x^2+(3y-10)x+12=0,$
$x^3+(y-8)x^2+(y+16)x-3=0.$

2693. $x^3+mx^2-4=0, \quad x^3+mx+2=0.$

2694. $x^3+4mx^2-3x+2=0, \quad 2x^3+(m+2)x^2-5x+1=0.$

2695. Найти дискриминант $x^n+a=0.$

2696. То же для уравнения $x^3+px^2+qx+r=0.$

2697. В выражение дискриминанта $D(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ входит член $Ma_0^{n-1}a_n^{n-1}$. Найти M.

2698*. Доказать теорему: если все корни уравнения с целыми коэффициентами $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0$ по модулю равны единице, то они равны корням из единицы (Кронекер).

§ 8. Преобразование и решение уравнений

2699. Корни уравнения $x^3+px+q=0$ вещественны при условии $4p^3+27q^2\leqslant 0$. Когда корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ вещественны?

2700. Решить уравнение $x^4+4x^3+11x^2+14x+12=0$ подстановкой $x=y+\sigma$ при подходящем выборе σ.

Следующие уравнения привести к уравнениям с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшем члене, равном единице, применяя подстановку вида $y=ax$:

2701. $5x^4-9x^3+15x^2-12x+18=0.$

2702. $900x^4-750x^3+375x^2-13=0.$

2703. Доказать, что уравнение $a_0x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\ldots+a_n=0$ имеет мнимые корни, если уравнение $a_0x^{2n}-a_1x^{2n-2}+\ldots+(-1)^na_n=0$ имеет вещественные.

2704. Найти уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $x^5+x^3+x^2+2x+3=0$, и доказать, что у данного уравнения есть мнимые корни.

---

* См. указание в „Ответах".

2705. У уравнения $x^4-2x^3-3x^2+4x-1=0$ один из корней равен квадрату другого. Решить уравнение.

Решить уравнения:

2706. $x^4-6mx^3+2(4m^2+n)x^2-6mnx+n^2=0$.
2707. $4(x^2-x+1)^3-27x^2(x-1)^2=0$.
2708. При каком условии два из корней уравнения $x^3+px+q=0$ отличаются только знаком?

Доказать теоремы:

2709. Возвратное уравнение $ax^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_1x+a=0$ подстановкой $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ приводится к решению уравнения степени n и квадратного уравнения.

2710*. Возвратное уравнение с вещественными коэффициентами $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_nx^n+\ldots+a_1x+1=0$, у которого $|a_n|\leqslant 2$, имеет по крайней мере одну пару мнимых корней.

2711. Полином с вещественными коэффициентами $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ в интервале $(-2, 2)$ не может по абсолютной величине все время оставаться меньше, чем 2.

2712. Уравнение с вещественными коэффициентами $x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_nx=m$ в интервале $(-2, 2)$ имеет хотя бы один корень, если $|m|<2$.

2713. Уравнение с вещественными коэффициентами $x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_nx=m$ имеет корень в промежутке $(-2l, 2l)$, где $2l^{2n+1}=|m|$ (Чебышев).

Преобразовать следующие уравнения указанной подстановкой (преобразование Чирнгауза):

2714. $x^3-x^2-4x+4=0$; $y=x^2+x-1$.
2715. $2x^3-5x^2+x+2=0$; $y=2x^2+3x-1$.
2716. $x^3-6x^2+15x-14=0$; $2y=x^2-5x+8$.
2717. $x^4+2x^3-13x^2-14x+48=0$; $y=x^2+x-7$.

Найти уравнения для y, корни которых выражаются через корни данных уравнений указанным образом:

2718. $x^3+2x-1=0$; $y_1=x_1x_2$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_2x_3$.

2719. $x^3-x^2-3=0$; $y_1=\dfrac{x_1}{x_2+x_3-x_1}$ и т. д.

2720. $x^3+px+q=0$; $y_1=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

2721. $x^3+3x^2-4x+3=0$; $y_1=\dfrac{x_1x_2-x_3^2}{x_1+x_2-2x_3}$.

2722. $ax^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$; $y_1=(x_1-x_2)(x_1-x_3)$.

* См. указание в „Ответах".

Решить уравнения:

2723. $x^3-3ax^2+(3a^2-b^2)x-a^3+ab^2=0$.

2724. $x^3-3(a-b)x^2+(3a^2-6ab-b^2)x-a^3+3a^2b+ab^2-3b^3=0$.

2725. $x^3-(a+1)^2x^2+(2a^3+a^2+2a-1)x-a^4+1=0$.

2726. $x^3-5x^2+3x+6=0$.

2727. $x^4-12ax^3+(45a^2-b^2)x^2-2a(29a^2-5b^2)x+24a^2(a^2-b^2)=0$.

2728. $x^4-4(a+1)x^3+(5a^2+14a+4)x^2-(2a^3+14a^2+12a)x+4a^3+8a^2=0$.

2729. $2x^4+7x^3+10x^2+11x+6=0$.

Полное кубичное уравнение

$$y^3+Ay^2+By+C=0$$

линейной подстановкой $y=x-\frac{A}{3}$ приводится к уравнению

$$x^3+px+q=0.$$

Последнее проще всего решается подстановкой $x=u+v$, вводящей два новых неизвестных. После нее данное уравнение переходит в такое:

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, достаточно положить $u^3+v^3=-q$, $3uv+p=0$. Отсюда находятся u и v, а потом и x. Окончательно получается формула Кардана:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Для кубичных радикалов следует брать лишь такие значения, чтобы их произведение было равно $-\frac{p}{3}$ (способ Гудде).

Подобно этому, полное уравнение четвертой степени

$$y^4+Ay^3+By^2+Cy+D=0$$

подстановкой $y=x-\frac{A}{4}$ приводится к уравнению

$$x^4+ax^2+bx+c=0.$$

Один из наиболее простых способов его решения принадлежит Феррари.

Уравнение переписываем в таком виде:

$$4x^4+4ax^2=-4bx-4c.$$

Прибавляя одинаковые слагаемые к обеим частям, получаем:

$$4x^4+4(a+\lambda)x^2+(a+\lambda)^2=4\lambda x^2-4bx-4c+(a+\lambda)^2$$

или

$$(2x^2+a+\lambda)^2=4\lambda x^2-4bx+\lambda^2+2a\lambda+a^2-4c. \qquad (*)$$

Величину λ можно подобрать так, чтобы полином в правой части имел равные корни. Для этого должно быть

$$\lambda^3+2a\lambda^2+(a^2-4c)\lambda-b^2=0.$$

Если λ — один из корней этой кубической резольвенты, то уравнение (*) переписывается в таком виде:

$$(2x^2 + a + \lambda)^2 = 4\lambda \left(x - \frac{b}{2\lambda}\right)^2$$

и сводится к двум квадратным уравнениям:

$$2x^2 + a + \lambda = \pm 2 \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{b}{2\lambda}\right).$$

Решить по формуле Кардана и способу Феррари уравнения:

2730. $x^3 - 6x - 9 = 0.$ **2731.** $x^3 + 6x - 7 = 0.$
2732. $x^3 + 3x - 2 = 0.$ **2733.** $x^3 + 3x - 4 = 0.$
2734. $x^3 - 7x - 6 = 0.$ **2735.** $x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0.$
2736. $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0.$ **2737.** $x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0.$
2738. $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$

§ 9. Отделение и вычисление корней

Найти рациональные корни уравнений:

2739. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0.$ **2740.** $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0.$
2741. $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0.$
2742. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0.$
2743. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0.$
2744. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0.$
2745. $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0.$
2746. $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0.$

Найти кратные корни уравнений:

2747. $x^3 - 12x + 16 = 0.$ **2748.** $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0.$
2749. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0.$ **2750.** $x^4 - 6x^2 - 8x + 24 = 0.$
2751. $x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0.$
2752. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0.$
2753. $x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0.$
2754. $(x + 1)^7 - x^7 + 7x + 6 = 0.$
2755. $x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$
2756. $x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0.$

Отделить вещественные корни уравнений:

2757. $x^3 - 12x + 5 = 0.$ **2758.** $x^3 - 27x - 17 = 0.$
2759. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0.$ **2760.** $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0.$
2761. $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0.$
2762. $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 39x - 21 = 0.$
2763. $x^{2n+1} + px + q = 0.$

Отделить по способу Фурье корни уравнений:

2764. $x^3 - 12x - 4 = 0.$ **2765** $x^3 - 24x + 11 = 0.$

2766. $x^4-4x^3-3x+23=0$. **2767.** $x^4-x^3+4x^2+x-4=0$.
2768. $x^4+6x^3-2x^2+1=0$. **2769.** $x^5-10x^3+6x+1=0$.
2770. $x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2=0$.

Отделить по способу Штурма корни уравнений:

2771. $x^3+2x-7=0$. **2772.** $x^3-21x+7=0$.
2773. $x^4-6x^3+x^2-1=0$. **2774.** $x^4+x^3-4x^2-4x+1=0$.
2775. $x^4-12x^3-55x^2+96=0$. **2776.** $x^5+5x^3-7x+2=0$.
2777. $x^5+7x^3-5x+11=0$.

2778. Составить ряд функций Штурма для уравнений

a) $x^2+px+q=0$ и b) $x^3+px+q=0$.

2779. Методом Штурма найти условие вещественности корней уравнения $x^5-5px^3+5p^2x+2q=0$.

2780. Сколько вещественных корней имеет предыдущее уравнение, если $p^5<q^2$?

2781. Числа a_ν — вещественны, b_ν — положительны. При этом $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x-a_\nu-b_\nu i)=\varphi(x)+i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами. Доказать, что корни уравнения $p\varphi(x)+q\psi(x)=0$ вещественны при любых вещественных p и q.

2782. Отделить корни уравнения относительно λ:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,\quad a^2>b^2>c^2.$$

2783. Определить число вещественных корней уравнения

$$f(x)=1+ax+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n=0,$$

воспользовавшись теоремой Штурма и равенством

$$(1-x)f'(x)=af(x)-\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)(a+n)}{1\cdot 2\ldots n}x^n.$$

Вычислить с точностью до 10^{-5} корни следующих уравнений:

2784. $x^3-5x+1=0$. **2785.** $x^3-9x^2+20x-11=0$.
2786. $x^3+3x^2-4x-1=0$. **2787.** $x^3+6x^2+6x-7=0$.
2788. $x^3-3x^2+8x+10=0$. **2789.** $x^4+2x^2-6x+2=0$.
2790. $x^5+5x+1=0$.

Найти с точностью до 10^{-3} корни следующих уравнений:

2791. $x^4+2x^3+6x^2-1=0$. **2792.** $10x=10+\sin x$.
2793. $10x=e^{-x}$. **2794.** $x=e^{-x}$. **2795.** $10\ln x=x^3-3$.

2796. Шар с радиусом 1 *м* имеет удельный вес 0,75. На какую высоту он выступает из воды, плавая в ней?

ОТВЕТЫ*)

1. $\{-5, -3\}$. **2.** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $AB = 5$. **3.** $\cos\theta = 0$. **4.** $-\frac{33}{13}$. **5.** $-2\sqrt{2}$. **6.** $5\sqrt{2}$, $\alpha = -45°$. **7.** $(7, 3)$. **8.** $(12, -7)$. **9.** $A(-1, 0)$, $B(5, 6)$. **10.** $(2, -2)$. **11.** $(8, 1)$, $(0, -3)$, $(-4, 5)$. **12.** $(3, 10)$ и $(-1, 7)$ или $(9, 2)$ и $(5, -1)$. **13.** $(6, \pm 2\sqrt{3})$. **14.** $(5, 1)$. **19.** Координаты одной из вершин: $\xi = x_1 - x_2 + x_3 - \ldots - x_{2n-2} + x_{2n-1}$; $\eta = y_1 - y_2 + y_3 - \ldots - y_{2n-2} + y_{2n-1}$. **20.** $(0, 0)$, $(10, 0)$. **21.** $\frac{1}{2}\sqrt{130}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$. **22.** 9,5. **23.** 11,5. **24.** 12 ± 20. **25.** 49. **26.** -35. **27.** 29,5. **28.** $(5, 4)$. **29.** $x\sqrt{2} = -x_1 - y_1$, $y\sqrt{2} = x_1 - y_1$. **30.** $(-7, 1)$. **31.** $(x-1)\sqrt{2} = x_1 + y_1$, $(y-1)\sqrt{2} = -x_1 + y_1$. **32.** $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$. **33.** $(4n+3)\cdot 45°$. **35.** $(2 + 5\sqrt{3}, 8)$. **36.** 7. **37.** $6\sqrt{2}$; 225°; 4; 330°. **39.** $y = \pm h$. **40.** $x = \pm h$. **41.** $y = x$, $x + y - 1 = 0$. **42.** $(5, 7)$. **43.** M_1 выше, M_2 и M_4 ниже, M_3 — на прямой. **44.** $y = x - 1$. **45.** $x + 3y - 5 = 0$. **46.** $x - 3 = 0$. **47.** $3x - y - 4 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$, $3x + 5y - 34 = 0$. **48.** $2x + 3y - 1 = 0$. **49.** $x + 2y + 4 = 0$. **50.** $5x + y - 20 = 0$, $x - 5y + 22 = 0$. **51.** 135°; 30°; 15°. **52.** $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 8y + 12 = 0$. **53.** $(-1, -1)$, $(-2, -2)$, $(8, -7)$. **54.** 10. **55.** $11y - 8x - 14 = \pm 5\sqrt{3}(x - 1)$. **56.** $3x + y - 4 = 0$, $3x + y - 8 = 0$, $x - 3y - 4 = 0$, $x - 3y - 8 = 0$. **57.** $(2, 4)$, $1/2$. **58.** $3x + 2y - 7 = 0$, $4x + y - 6 = 0$. **59.** $x + 2y - 11 = 0$, $2x + y - 5 = 0$. **60.** $3x - 4y + 11 = 0$, $4x + 3y - 2 = 0$. **61.** $7x - 24y - 62 = 0$, $x = 2$. **62.** $y = 3x + 20$, $y = 3x - 10$. **63.** $4x - 3y + 25 = 0$. **64.** $4x + 3y + 1 \pm 15 = 0$. **65.** $3/\sqrt{52}$. **66.** $2x + 4y - 3 = 0$. **67.** $12x + 8y - 7 = 0$. **68.** $2x + 3y \pm 6 = 0$. **69.** $(0, 3)$, $(2, -1)$. **70.** $x - y + 1 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$. **71.** $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y = 7$. **72.** $3x + y = 25$, $x - 3y = 15$, $y = 2x$. **73.** $\operatorname{tg}\omega = \frac{48}{71}$. **74.** $2y = 3x$, $13x - 4y = 14$. **75.** $9x - y - 39 = 0$, $x - 4y + 16 = 0$, $12x - 13y - 18 = 0$. **76.** $y = x + 3$. **77.** $3x - 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 2 = 0$, $x - 5y + 1 = 0$. **78.** $2x + 7y = 5$. **79.** $31x + 48y = 0$. **80.** $3x + 4y = 25$. **81.** $2x + 7y = 5$. **82.** $x = 0$, $y = 0$. **83.** $x - 7y + 19 = 0$, $7x + y - 17 = 0$. **84.** $7x + y + 4 = 0$, $x - 7y + 6 = 0$.

---

*) Чертежи к ответам даны на стр. 248—282.

85. $4x+2y+1=0$. **86.** $x=y$. **87.** 5. **88.** $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$. **89.** $x+4y=4$. **90.** $2x+11y-24=0$. **91.** $\left(4\frac{24}{25},\ 4\frac{174}{175}\right)$. **92.** $y=\pm(x-4)$. **93.** $5x-4y+2=0$, $4x-5y+1=0$. **94.** $\left(-\frac{13}{5},\ \frac{31}{5}\right)$. **95.** $3x-46y+28=0$, $9x+2y-28=0$, $46x-3y-77=0$. **96.** $x=1$, $3x-4y+1=0$, $x-8y+27=0$. **97.** $2x-y+4=0$. **100.** $x_1\sqrt{5}=-x-2y+1$, $y_1\sqrt{5}=2x-y+1$. **101.** $(x_1+y_1)\sqrt{2}+3=0$, $(x_1-y_1)\sqrt{2}+1=0$. **107.** $x^2+y^2=ay$. **108.** $r=a\sin\varphi$. **109.** $(3,\ -4)$. **110.** Четыре решения. Один из ответов: $x^2+y^2-4x-6y+9=0$. **111.** $\frac{1}{2}\sqrt{26}$. **112.** $x^2+y^2-10x-5y=0$. **113.** $(0,\ 1)$, $\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$. **114.** $x^2+y^2=25$. **115.** $x+2y=5$. **116.** $-2x+y=5$, $x+2y=5$. **117.** $ax=by$. **118.** $x+y=3\pm3\sqrt{2}$. **119.** $l^2=x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C$. **121.** $(x-4)^2+(y-4)^2=16$, $(x-20)^2+(y-20)^2=400$. **122.** $x^2+y^2=15x$. **123.** $(-3,\ 0)$. **124.** $(x-a)^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$, $x^2+(y-a)^2=\frac{1}{2}a^2$. **130.** $x^2+y^2=ax$. **131.** $n\cdot\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm m\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}$. **132.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **133.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **134.** $y=x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}$. **135.** $(2a-x)y^2=x^3$. **136.** $(x^2+a^2)y=a^3$. **137.** $[(x+a)^2+y^2]\cdot[(x-a)^2+y^2]=b^4$ или $r^4-2a^2r^2\cos2\varphi+a^4-b^4=0$. **138.** $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ или $r=a\sqrt{2\cos2\varphi}$. **139.** Если данные точки: $(0,\ 0)$ и $(c,\ 0)$, то полярное уравнение: $(1-a^2)r^2-2(ab+c\cos\varphi)r+c^2-b^2=0$. **140.** $y^2[(a+y)^2+x^2]=h^2(a+y)^2$. **141.** $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. **142.** $x=a(t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$. **143.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. **144.** $x=at-b\sin t$, $y=a-b\cos t$. **145.** $x=a[(n+1)\cos t-\cos(n+1)t]$, $y=a[(n+1)\sin t-\sin(n+1)t]$. **146.** $x=a[(n-1)\cos t+\cos(n-1)t]$, $y=a[(n-1)\sin t-\sin(n-1)t]$. **151.** Отрезок прямой $bx=\pm ay$. **152.** Прямая, соединяющая середину высоты с серединой основания. **153.** Прямая, соединяющая середины диагоналей. **154.** $3x^2-y^2+2ax=a^2$. **155.** $x^2-y^2+2xy\operatorname{ctg}\varphi=a^2$. **156.** $x+y=1$. **157.** Прямая. **160.** Прямые. **161.** $x^2+y^2=cx$. **164.** $4y=x^2$. **165.** $y^2=2x$. **166.** ~1 *см*. **167.** Фокусное расстояние 2,5 *см*. **169.** 16. **171.** $x=\frac{2}{3}p$, $x=\frac{8}{5}p$. **172.** $y^2=16x+64$. **173.** $y^2=\frac{b^2}{a}(a-x)$, $b=2a$. **174.** $y=2x$; $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$. **175.** $(-1,\ -6)$, $\left(-1,\ -\frac{11}{2}\right)$, $y=-\frac{13}{2}$. **179.** $y=\frac{1}{4}(x^2+2x+5)$, $x^2+y^2+x-9y+8=0$, $\operatorname{tg}\omega=\frac{4}{3}$; 0; $\frac{9}{13}$. **181.** $y=x-1$. **182.** $\pm2x+y+4=0$. **183.** $x-2y+2=0$, $x+4y+8=0$. **185.** $\operatorname{tg}\omega=2\sqrt{3}$. **186.** $p/2\sin\alpha$. **187.** Касательная в вершине. **188.** $y=2x+4$. **189.** $x\pm y+2=0$. **191.** Директриса. **192.** $x^2+4y^2=36$. **193.** $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$. **194.** $x^2+4y^2=65$. **196.** $\sim0{,}08$. **197.** $\sim5{,}1\cdot10^6$.

198. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $x_1=4\frac{27}{34}$, $x_2=-\frac{37}{34}$. **199.** 0,5. **200.** $\sqrt{2}$. **201.** $\sqrt{3}$. **202.** $1:\sqrt{3}$. **203.** $2x_1y_1=a^2$. **204.** $\sqrt{5}$, 2. **205.** $120°$. **206.** $1:\sqrt{2}$. **207.** $3x^2+4y^2=192$. **208.** $2x^2-2y^2=a^2-b^2$. **209.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. **210.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. **211.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **212.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$. **213.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. **214.** $(8{,}2,\ \pm 1{,}35)$. **215.** b. **216.** $16x^2+25y^2=400$. **217.** $9x^2-16y^2=144$. **221.** $x\pm 2y=0$. **225.** $60°$. **226.** $a_1=b_1=\sqrt[4]{2}$. **227.** $a_1=$ $=\sqrt{10/3}$. **228.** $e^2=\frac{5\sqrt{13}-13}{6}$. **229.** $y=\frac{\sqrt{3}}{5}x$, $y=-\frac{x}{3\sqrt{3}}$. **230.** $y=$ $=\pm\frac{x}{\sqrt{17}}$, $y=\mp\frac{8x}{\sqrt{17}}$. **231.** $a=\frac{15}{11}$, $b=\frac{12}{11}$. **232.** $a_1=b_1=2$. **233.** $\sin\varphi=\left(m-\frac{1}{m}\right)\frac{\sqrt{e^2-1}}{2-e}$. **234.** $\operatorname{tg}\varphi=\frac{6\sqrt{2}}{5}$. **235.** $2a_1=17{,}9$, $2b_1=17{,}1$. **237.** $y=-2x\pm 4$; $\frac{8}{\sqrt{5}}$. **238.** $x-y\pm 2=0$. **239.** $x-3=0$, $10x+9y+24=0$. **240.** $x-1=0$, $5x+4y+3=0$. **241.** $2x-3y\pm 5=0$. **242.** $10x+3y\pm 8=0$. **243.** $x-y\pm 2=0$, $2\sqrt{2}$. **245.** $y=\pm 3(x\pm 4)$. **246.** $y\pm 6=\pm\sqrt{3{,}8}\,x$. **247.** $90°$. **254.** a), b) — пары пересекающихся прямых; c) двойная прямая; d) параллельные прямые; e) точка; f) мнимость. **255.** a) мнимость; b) гипербола; c) парабола. **256.** $k=1$. **257.** $k=\frac{1}{2}$. **258.** $\lambda=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sigma x\sqrt{3}-2y=0$, $x-2\sigma y\sqrt{3}+2=0$, $\sigma=\pm 1$. **259.** $\lambda=$ $=4\sigma$, $\mu=-7\sigma$, $x+\sigma y-3=0$, $2x+2\sigma y-1=0$, $\sigma=\pm 1$. **260.** $x+1=0$, $2x-y+1=0$. **262.** $xy=x+y$. **265.** $xy-y^2-x-2y+3=0$. **266.** $xy+$ $+2y-x-2=0$. **267.** $(x-y)^2=2x+2y+3$. **268.** $x^2+xy+6y^2+2x+$ $+7y-17=0$. **275.** $C(-1;\ 0)$, $x_1^2+x_1y_1-3=0$. **276.** $C(2;\ 1)$, $x_1^2+3x_1y_1-$ $-2y_1^2+8=0$. **277.** $C(1;\ -1)$, $x_1^2-2x_1y_1+y_1^2-7=0$. **279.** $y-x+2=0$, $x+y=0$. **280.** $F_1(1;\ 1)$, $F_2(-2;\ -2)$. **281.** $e=\sqrt{5/3}$. **282.** $C(3;\ 1)$, $\alpha=45°$, $x_1^2+3y_1^2=18$. **283.** $C(-4,\ 0)$, $\alpha=45°$, $4x_1^2-2y_1^2+23=0$. **284.** $\alpha=45°$, $x_1=$ $=\frac{1}{2\sqrt{2}}+x_2$, $y_2^2=x_2\sqrt{2}$. **287.** $y_1\sqrt{2}=x+y-2$, $x_1\sqrt{2}=x-y$, $y_1^2=2x_1\sqrt{2}$. **288.** $5y_1=4x+3y+5$, $5x_1=3x-4y+7$, $y_1^2=14x_1$. **289.** $y_1\sqrt{34}=3x+5y-1$, $2x_1\sqrt{34}=-10x+6y-7$, $y_1^2=\frac{2}{\sqrt{34}}x_1$. **294.** $4x_1^2+9y_1^2=36$. **295.** $x_1^2+9y_1^2=9$. **296.** $x_1^2+4y_1^2=16$. **297.** $9x_1^2+4y_1^2=324$. **298.** $9x_1^2-y_1^2=9$. **299.** $9x_1^2-25y_1^2=225$. **300.** $9x_1^2-16y_1^2=144$. **301.** $x_1^2-9y_1^2=9$. **302.** $y_1^2=2x_1$. **303.** $x_1^2-2y_1^2=3$. **304.** $(x+y-1)(2x-3y-3)+4=0$. **305.** $(x-y+1)(x+y-4)+2=0$. **306.** $[A(x-a)+B(y-b)]\cdot[B(x-a)-$ $-A(y-b)]+K=0$. **307.** $(x+y)^2+5x-y=0$. **308.** $(x-y)^2+x-1=0$.

309. $(x-y)^2=8x$. **310.** $4x^2-7xy+4y^2-7x+8y=0$. **313.** $(x-2y-1)^2+(2x-y+1)^2=9$. **314.** $(x+y-1)^2+x+2y-1=0$. **315.** $(x-y+1)^2\pm 4(x+y+1)=0$. **316.** $(x+y-1)^2+4(x-y+1)^2=8$, $4(x+y-1)^2+(x-y+1)^2=8$. **317.** $3(x+2y-4)^2+2(x-3y+2)^2=10$, $8(x+2y-4)^2+3(x-3y+2)^2=20$. **319.** $x+y=1$, $F(2, 1)$. **320.** $F_1(-1; 2)$, $F_2(3; 0)$, $y=2x$, $y=2x-2$. **321.** $F_1(-2; 4)$, $F_2(0; 0)$, $x-2y+14=0$, $x-2y-4=0$. **322.** $x^2-2xy+y^2+8x=0$. **323.** $5x^2-8xy+5y^2-12x+6y=0$. **324.** $100[(x-2)^2+(y-1)^2]=(x-y-50)^2$. **325.** $2xy=1$. **326.** Фокусы в точках $\left(1\pm\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$. **327.** $(5x-1)^2+(5y+3)^2=5(x+2y+1)^2$, $(4x+1)^2+(4y+6)^2=5(x+2y+1)^2$. **328.** $(x-1)^2+(y-1)^2=[2-x-y\pm\sqrt{2}(x+y-1)]^2$, $(x-1)^2+(y-1)^2=[2-3x-y\pm\sqrt{2}(x+y-1)]^2$. **329.** $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2(x+y+1)^2$, $6\alpha=-1\pm\sqrt{7}$. **330.** $9[(x-1)^2+(y-1)^2]=25(x-y+4)^2$, $(x-1)^2+(y-1)^2=25$. **331.** $(x-y)^2=8(x+y)$. **332.** $2x^2-2y^2+4y-1=0$. **333.** $2(x-1)+2(y+1)^2=1$. **334.** Если директриса ось Oy, данная точка $(a, 0)$, то искомое уравнение: $4x^2+y^2=4ax$. **335.** $(x+1)^2+(y+1)^2=1$. **336.** Гипербола. **337.** $x=2y$. **338.** $x+y-2=0$, $5x+5y-6=0$. **339.** $y\pm 2=0$, $x\pm 2=0$. **340.** $9x+10y-28=0$. **341.** $x+y-2=0$, $7x+10y-8=0$. **347.** Концентрическая окружность радиуса $\frac{r^2}{R}$. **348.** В теореме Паскаля сторона, обратившаяся в нуль, заменяется касательной в вершине пятиугольника. В теореме Брианшона получается пятиугольник, когда одна вершина становится точкой касания. **353.** $4x^2-5y^2-12x+4=0$. **354.** $(x+y)^2+6x-26y-55=0$, $(x-y)^2-10x-6y+25=0$. **355.** $xy-x-y-1=0$. **356.** $ax=a^2-b^2$. **357.** $x^2+y^2=a^2$. **358.** Фокус. **360.** Если направление задано прямой $y=mx$, то искомое уравнение $(x+my)(mx-y)=m(a^2-b^2)$. **361.** $x+y-1=0$. **362.** $x^2+y^2=y$. **363.** Две параболы. **364.** Парабола. **367.** Окружность. **370.** Парабола. **372.** $(A-B)xy-Abx+Bay=0$. **373.** Прямая. **376.** Если данный круг $x^2+y^2=a^2$ и точка $A(c, 0)$, то искомое уравнение $(a^2-c^2)(x^2+y^2)+2a^2cx-2a^4=0$. **377.** Гипербола. **378.** Эллипс. **384.** $|r|=9$, $\cos\alpha=\frac{1}{9}$, $\cos\beta=-\frac{4}{9}$, $\cos\gamma=\frac{8}{9}$. **385.** $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$; $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=11$. **386.** -3. **387.** $-13\mathbf{i}+18\mathbf{j}-7\mathbf{k}$. **391.** $45°$. **392.** $60°$. **393.** $|\overline{AB}|=15$; $\angle BAC=90°$. **394.** 45. **395.** $-\frac{4}{7}$. **396.** $\pm(6\mathbf{i}-9\mathbf{j}-2\mathbf{k})$. **397.** -14. **398.** $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-30\mathbf{i}+\mathbf{j}-27\mathbf{k}$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-16\mathbf{i}-20\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. **399.** 3. **400.** $h=\frac{(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}=\sqrt{\frac{27}{14}}$. **401.** $\frac{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}=\sqrt{10}$. **404.** $m=\frac{1}{3}$. **405.** $\lambda=1$, $\mu=\frac{1}{3}$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}$. **407.** $15\mathbf{a}^*=\mathbf{i}-5\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $15\mathbf{b}^*=-2\mathbf{i}-5\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $15\mathbf{c}^*=5\mathbf{i}+5-5\mathbf{k}$, $x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}=m\mathbf{a}^*+n\mathbf{b}^*+p\mathbf{c}^*$. **410.** $x=(m\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}):|\mathbf{a}|^2$. **411.** $\mathbf{x}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. **415.** $12\sqrt{\sqrt{3}-1}$. **416.** Первый орт имеет направление $\mathbf{a}$, третий орт перпендикулярен к $\mathbf{a}$ и лежит в плоскости $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **417.** $\mathbf{e}_1\cos\theta+\mathbf{e}_1'\sin\theta$, где $e_1' = e_1 \times (e_2 \times e_1) : |e_1 \times (e_2 \times e_1)|$. **418.** $\left[\left(6 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) i + (2 + 3\sqrt{5}) j + \left(3 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) k\right] : 7\sqrt{2}$. **419.** $r_1 = (r \cdot e) e + (e \times r) \sin \omega + (e \times r) \times e \cdot \cos \omega$. **420.** $\frac{1}{4}[(7 + 2\sqrt{6}) i + (5 - 2\sqrt{6}) j + (4 - \sqrt{6}) k]$.

423. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{7}{4} = 1$. **424.** $-6, -3, 2$. **425.** $x + 2y + 2z = 2$. **426.** $5x - 3y - 7z = 0$. **427.** $x - 1 = 0,\ y - 1 = 0,\ z - 1 = 0,\ x + y + z = 1$. **428.** $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **429.** $\cos (p, xOy) = \frac{1}{3}$. **430.** $\sin (p, Ox) = \frac{6}{7}$. **431.** $\cos \theta = \frac{16}{21}$. **432.** $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **433.** $2x - y - 3z = 0$. **434.** $2x - y + 1 = 0$. **435.** $x - y = 0$. **436.** По разные стороны. **437.** 6. **438.** $z = 1 \pm 20$. **439.** $\sqrt{3}$. **440.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **441.** $x + y - 2z + 1 = 0$. **442.** $7z_1 = -2,\ 5z_2 = -28$. **443.** $17x - 14z + 39 = 0,\ 35x - 38z - 117 = 0$. **444.** $(3, -1, 0)$. **445.** $x + 2y = 0$. **446.** $x + y - z - 3 = 0$. **447.** $x - 2y + z - 3 = 0$. **448.** $(1, 2, 3)$. **450.** $x + y + 2z - 4 = 0$. **451.** $3x_1 = -x + 2y - 2z + 7,\ 3y_1 = 2x - y - 2z + 1,\ 3z_1 = -2x - 2y - z + 2$. **452.** $x + y \pm z = a$. **453.** $\lambda = \pm\sqrt{2}$. **454.** $\lambda = 3$. **457.** $2x - y - 2z + 4 = 0,\ 4x - y - 2z + 2 = 0$. **459.** $5x - 3y + 5 = 0,\ x - 3z - 2 = 0,\ y - 5z - 5 = 0$. **460.** $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{61}},\ \cos \beta = \frac{6}{\sqrt{61}},\ \cos \gamma = -\frac{3}{\sqrt{61}}$. **461.** 60°. **462.** 90°. **463.** $\cos \varphi = \sqrt{\frac{12}{13}}$. **464.** $\frac{2(1 + \sin 2\alpha)}{\sqrt{5 \sin^2 2\alpha + 12 \sin 2\alpha + 8}}$. **465.** 0°. **466.** $x = t + 1,\ y = -t + 2,\ z = 2t + 1$. **467.** $x = 1,\ y = 2$. **468.** $\frac{6}{13}, \frac{17}{13}, \frac{-1}{13}$.

469. $A'(5;\ 2{,}5;\ 2{,}5),\ B'(2, 4, 4),\ |A'B'| = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. **470.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-9}$. **471.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$. **472.** $x = 2,\ y = 1$. **473.** $x + y - 2z + 1 = 0,\ x + 2y - z - 2 = 0$. **474.** $x - y + z - 2 = 0,\ x + y + 2z - 5 = 0$. **475.** $x + y + 3z - 7 = 0$. **476.** $x - z + 1 = 0$. **477.** $x - y + z = 0$. **478.** $x - 5y + 5z - 2 = 0$. **479.** $x - 2y + z - 1 = 0$.

480. $\left.\begin{matrix} x + 7y - 5z + 20 = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{matrix}\right\}\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{42}}$. **481.** $3x - y = 0,\ x + 3y = 0$.

482. $x - (2 \pm \sqrt{3}) y + (1 \pm \sqrt{3}) z = 0$. **483.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$. **484.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$. **485.** $7x - 26y + 18z = 0$. **486.** $x + 2y + 1 = 0$. **487.** $x + 3y = 0,\ 3x - y + 4z - 12 = 0$. **488.** $(-7, -5, -11)$. **489.** $(1, 0, -2)$. **490.** $(-5, 2, 4)$. **491.** $3x - y + z - 1 = 0,\ x + 2y - z = 0$. **492.** $(-7/3, -2/3, 4/3)$. **493.** $\lambda = 1{,}25$. **494.** $x + y + z + 1 = 0,\ 2x - y - z + m = 0$. **495.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$. **496.** $y + 1 = 0,\ 2x - z + 1 = 0,\ h = \sqrt{5}$. **497.** $\operatorname{tg} \varphi = 49/3$.

498. $x_1=2lt-x_0,\ \ y_1=2mt-y_0,\ \ z_1=2nt-z_0,$ где $t=\dfrac{lx_0+my_0+nz_0}{l^2+m^2+n^2}$.
499. $x+y+z=0$. **500.** $y+z-2=0,\ 2x+5y+4z+8=0$. **501.** $\cos(\mathrm{I},\mathrm{II})=0$, $\cos(\mathrm{I},\mathrm{III})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos(\mathrm{II},\mathrm{III})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **502.** $5x+3y-z-1=0$.
503. $x+2y+2z-1=0$. **504.** $x-z-2=0$. **507.** $d\sqrt{2}=3$. **510.** $d=1$.
511. $d\sqrt{2}=1$. **514.** $2:\sqrt{3}$. **516.** $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{-8}$, $\dfrac{x-3}{47}=\dfrac{y+2}{-20}=\dfrac{z-1}{11}$. **517.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{15}=\dfrac{z-3}{4}$.
518. Тангенсы последовательных углов $\dfrac{55}{37}$, $\dfrac{22}{19}$, $\dfrac{22}{31}$, $\dfrac{55}{67}$. **519.** $x=0$, $x+y+z=a$. **520.** $a(x-1)+z=0$, $(a+1)(y-1)+z+1=0$.
525. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\dfrac{1}{2}$. **526.** $x\pm y=0$.
527. $y+z=2$. **528.** $(x-1)^2+y^2=z^2$. **529.** $x^2+xy+xz=x+y$.
530. $2x^2+z^2-3xy+3xz-3yz-5x+3y-14z+9=0$. **531.** $xy+xz-yz=x$. **532.** $4x^2-10xy+4xz+7y^2-5yz+8x-10y+2z=0$. **533.** $y=z$.
534. $2x^2+2y^2-2z^2+12xy+4xz-4yz+5x+23y+9z+4=0$.
535. $x^2+y^2=(z-1)^2$. **536.** $(x-z)^2+(y-z)^2=1$. **537.** $y=x\operatorname{tg}\alpha z$.
538. $b^2y^2+[x(x+y+z)-b(x+y)]^2=a^2x^2$. **539.** $x^2+y^2-xz-yz-z-1=0$.
540. $x^2+y^2=xz$. **542.** $(2x-y-z)^2+(x-2y+z)^2=(x+y+z-3)^2$.
543. $y^2=6x-9$. **544.** Если лампочка в точке (5, 0, 0), центр абажура в точке (5, 0, —1), стена — плоскость yOz. 1 ед. = 1 *дм*. Уравнение тени $9z^2-4y^2=100$; $x=0$. **545.** (0, 0, 2). **546.** $\left(0,\ 0,\ 2\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. **547.** (0, 0, 4).
548. $x^2+y^2=2(z\pm a)^2$, $3x^2+3y^2-6z^2=2a^2$. **551.** $x=0$, $y^2+a^2=4az$.
552. $r^2=r_1^2$, где $r^2(l^2+m^2+n^2)=\begin{vmatrix} x-a, & y-b \\ l, & m\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y-b, & z-c \\ m, & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-c, & x-a \\ n & l\end{vmatrix}^2$, $r_1^2\left(l_1^2+m_1^2+n_1^2\right)=\begin{vmatrix} x-a_1, & y-b_1 \\ l_1, & m_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y-b_1, & z-c_1 \\ m_1, & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-c_1, & x-a_1 \\ n_1, & l_1\end{vmatrix}^2$. **553.** $(5x-5y-3)^2+(5x-5z+5)^2+(5y-5z+8)^2=98$.
554. $y^2-x^2=4az$. **555.** $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta+cz^2+Exz+Fyz+Jz=0$. **556.** $x^2+y^2=2z+1$. **557.** $x=24t$, $y=-52t$, $z=5t$ и $x=2t$, $y=-2t$, $z=t$. **560.** $A(x-2)^2+B(y-1)^2+C(z-1)^2+D(x-2)(y-1)+E(x-2)(z-1)+F(y-1)(z-1)=0$ при выполнении условий $A>0$, $\begin{vmatrix} 2A; & D \\ D; & 2B\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} 2A, & D, & E \\ D, & 2B, & F \\ E, & F, & 2C\end{vmatrix}>0$. **561.** $[\lambda(2x-3y+2)+\mu(3y-2z)]^2+[\lambda_1(2x-3y+2)+\mu_1(3y-2z)]^2=0$, причем $\lambda\mu_1-\lambda_1\mu=0$.
562. $(x+2y-z+1)(x-y+z+1)=0$. **563.** $x+y+2z+5=0$, $y-3x-1=\pm2(x+1)\sqrt{2}$. **564.** $x=1$, $y=z$ и $y=1$, $x=z$. **565.** $x-y+2=0$, $x+y+z=0$ и $x+y=0$, $z=0$. **566.** $\dfrac{x-x'}{a\sqrt{b^2q-c^2p}}=\dfrac{y-y'}{bc\sqrt{p}}=\dfrac{z-z'}{bc\sqrt{q}}$.

567. $4x-3y-5z+4=0$. **568.** $4x+2y+4+\lambda(y+z)=0$ при $\lambda<-5$. **569.** $C(1, 1, -1)$; $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2x_1y_1-2y_1z_1+6x_1z_1=1$. **570.** $2x_1^2+6y_1^2+2z_1^2+8x_1z_1+1=0$. **571.** $4x_1y_1+4x_1z_1=1$. **572.** $x^2+y^2+z^2-x-y+z=0$. **573.** Образующие конуса $5(x+2)^2+20(y-1)^2=8(5z+1)^2$. **574.** $x^2+y^2-z^2=4$. **583.** $2x-3y+2z-2=0$. **584.** $x+y+z=6$. **585.** $x-y-z=0$. **586.** $z=0$, $\mathbf{P}(0, m, n)$. **587.** $2x+y-z=0$. **588.** $3x+1=0$, $3z-2=0$. **589.** $\mathbf{P}(0, 1, 0)$. **590.** $x=c$. **591.** $z=1$, $2x=3y$. **592.** $x=2z-2$, $y=z-1$. **593.** $y=C$. **597.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\pm\sqrt{3}$. **598.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\pm 1$.

599. (a^2t, b^2t, c^2t), где $t=1:\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **600.** $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. **604.** (σ, σ, σ), где $\sigma=\pm 1$. **605.** $(\sigma, \sigma, -3\sigma)$, где $\sigma=\pm 1$. **606.** $x^2+y^2=1$, $xy=z$. **609.** $90°$. **610.** $90°$. **611.** $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm\frac{z-c\sqrt{3}}{c}$. **624.** Куб с ребром $a\sqrt{3}$. **625.** $2x^2+2y^2-2xy+2x+2y-1=0$. **626.** $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. **627.** $x^2-2xy+y^2-2(x+y)+1=0$. **629.** Его образующие параллельны вектору $\mathbf{P}(\sqrt{a^2-b^2}, 0, \pm\sqrt{b^2-c^2})$. **632.** $\frac{\partial\Phi}{\partial x}x_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_1+\frac{\partial\Phi}{\partial t}t_1=0$, где после дифференцирования положено $t=1$. **633.** $F(x, y, z)=0$, $l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}=0$. **634.** $x^2+y^2+z^2=2a^2$. **636.** $x-y+z-1=0$. **637.** $l(x+2)+m(y-1)+n(2z+9)=0$. **638.** $x+y+z=0, lx+my-(l+m)z=0$. **642.** $x_1^2+y_1^2+z_1^2=49$, $O_1(3, -4, -5)$.

643. $x_1^2+2y_1^2+3z_1^2=6$; формулы перехода $\begin{cases} 3(x-1)=2x_1+2y_1-z_1, \\ 3y=2x_1-y_1+2z_1, \\ 3(z+1)=-x_1+2y_1+2z_1. \end{cases}$

644. $2x_1^2+y_1^2-z_1^2=2$; формулы перехода: $\begin{cases} 3x=-x_1+2y_1+2z_1, \\ 3(y+1)=2x_1-y_1+2z_1, \\ 3(z-1)=2x_1+2y_1-z_1. \end{cases}$

645. $x_1^2+2y_1^2-3z_1^2=6$; формулы перехода: $\begin{cases} 3(x+1)=-x_1+2y_1+2z_1, \\ 3(y+1)=2x_1-y_1+2z_1, \\ 3z=2x_1+2y_1-z_1. \end{cases}$

646. $x_1^2+2y_1^2-3z_1^2=0$; формулы перехода: $\begin{cases} 3(x+1)=-2x_1-2y_1+z_1, \\ 3(y+1)=-2x_1+y_1-2z_1, \\ 3(z+1)=x_1-2y_1-2z_1. \end{cases}$

647. $x_1^2+2y_1^2=2z_1$; формулы перехода: $\begin{cases} 3(x-1)=-2x_1-2y_1+z_1, \\ 3y=-2x_1+y_1-2z_1, \\ 3z=x_1-2y_1-2z_1. \end{cases}$

648. $x_1^2-y_1^2=2z_1$; формулы перехода: $\begin{cases} 3x=-2x_1-2y_1+z_1, \\ 3(y+1)=-2x_1+y_1-2z_1, \\ 3(z+1)=x_1-2y_1-2z_1. \end{cases}$

649. $x_1^2+2y_1^2=2$, $x+t+1=\xi$, $y-2t+1=\eta$, $z-2t=\zeta$, $3\xi=2x_1+2y_1+z_1$, $3\eta=2x_1-y_1-2z_1$, $3\zeta=-x_1+2y_1-2z_1$.
650. $x_1^2-y_1^2=1$, $x-m=\xi$, $y+2m=\eta$, $z+2m=\zeta$; дальше те же формулы,

что в предыдущей задаче. **651.** $y_1^2 = 2x_1$; формулы перехода, как в предыдущей задаче. **652.** $x_1^2 - y_1^2 = 0$ $\begin{cases} 9(x+7m) = 4x_1 - 4y_1 + 7z_1, \\ 9(y+4m) = x_1 + 8y_1 + 4z_1, \\ 9(z+4m) = -8x_1 - y_1 + 4z_1. \end{cases}$

653. $x_1^2 + y_1^2 = 0$ $\begin{cases} 3(x-2m) = x_1 - 2y_1 - 2z_1, \\ 3(y-2m) = -2x_1 + y_1 - 2z_1, \\ 3(z-m) = 2x_1 + 2y_1 - z_1. \end{cases}$ **654.** $x_1^2 = 1$; $x - 3m + 2n = \xi$, $y + 2m - 6n = \eta$, $z + 6m + 3n = \zeta$. См. ответ к задаче 655.

655. $x_1^2 = 0$ $\begin{cases} 7\xi = 6x_1 - 3y_1 + 2z_1 \\ 7\eta = 3x_1 + 2y_1 - 6z_1 \\ 7\zeta = 2x_1 + 6y_1 + 3z_1 \end{cases}$ (Для обеих задач 654 и 655.)

656. $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2 = 0$, $x + 2 = x_1$, $y - 3 = y_1$, $z - 2 = z_1$. **657.** $4y^2 - 2z^2 = x$. **658.** $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm \sqrt{2}$. **659.** $ab + ac + bc = 0$. **660.** $y = 0$; $\lambda^2 x + \lambda z + (1+\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 = 0$. **661.** $2c = 1 + \sigma\sqrt{5}$; $z = 0$; $2x = (\sigma\sqrt{5} - 1)y$; $\sigma = \pm 1$. **663.** $m < -1$ — эллипсоид; $m = -1$ — эллиптический цилиндр; $-1 < m < \frac{1}{2}$ — однополостный гиперболоид; $m = \frac{1}{2}$ — конус; $\frac{1}{2} < m < 1$ — двуполостный гиперболоид; $m = 1$ — цилиндр, $m > 1$ — эллипсоид. **664.** $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = (\alpha + 2\beta + 1)^2$. **665.** $xy + xz + yz + a^2 = 0$. **666.** $A(z+a)x + B(z-a)y + C(z^2 - a^2) = 0$. Гиперболический параболоид. **668.** $4(x+y+z)^2 - 3(2x-y-z)^2 + (y-z+1)^2 = 1$. **669.** $(x+2y+z)^2 + 4(x-z)^2 = 16$. **670.** $x^2 + 4y^2 + (z-2)^2 = 5$. **671.** $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$. **672.** $(x+y+z)^2 + 4(x-y) = 9$. **676.** $9(x-y)^2 + (x+7y-7z)^2 = 9(x+y+z)$ и $9(x-y)^2 + (x-5y+5z)^2 = 9(x+y+z)$. **677.** $x - y + (-2 \pm \sqrt{7})(2x - z) = 0$. **678.** $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$. **679.** $x + 16y - 30z \pm \sqrt{33}(x - 6z) = 0$. **680.** $x - y = 0$, $x + y - 2z = 1$. **681.** $x - 4y - 1 \pm \sqrt{3}(x - 2y) = 0$. **682.** $y + 2z = 0$. **683.** $2x - y - 4z = 0$. **684.** $lz \pm kx = \text{const}$, $bcl = \sqrt{b^2 - c^2}$, $abk = \sqrt{a^2 - b^2}$. **685.** $y = 0$, $lc^2 x = \pm ka^2 z$. **686.** $c^2y^2(a^2 - b^2) = b^2(z-h)^2(a^2 + c^2)$. **687.** $x = c$, $x + y - z = c$. **688.** $z + 1 = 0$; $x + 2y = 2$; $z + 1 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$. **689.** $z = \alpha$ и $\lambda x + \mu y + z = \beta$. **690.** $z = \alpha$ и $az + bx + cy + f = z + \beta$. **691.** $\lambda = \mu = 1$. **692.** $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 \pm xz\sqrt{3} = 0$. **693.** Гипербола в плоскости xOz. **694.** $y = 0$, $z^2 + 2px = p^2$. **696.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 4by - 2cz + 2z\frac{a^2 + b^2}{c} = R^2$. **697.** $x - 2y + z = 0$; $x - (1 \pm \sqrt{3})y = 0$. **698.** $x = 0$. **699.** $2x = q - p$. **700.** $x + 1 = \lambda z$, $\lambda(y+1) = -x$ и $x + 1 = \lambda x$, $\lambda(y+1) = -z$. **701.** $x - y - z = \lambda(\sqrt{3} - y + z)$, $\lambda(x - y - z) = 2(\sqrt{3} + y - z)$. **702.** $2y + z = 0$, $x + 8y - 2 = 0$; $2y - z = 0$, $x - 24y - 2 = 0$. **703.** $135°$; $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. **704.** $4x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. **705.** $y^2 - z^2 - x = 0$. **706.** $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 + Dz = a^2n^2$. **707.** $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2 + b^2}{ab}xz - 2bx - 2az = 0$. **708.** $px = -2a^2$, $y = 0$, $z = 2a$. **709.** $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0$. **710.** $y^2 = 2x - z$. **711.** $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 5y - 3z = 0$. **712.** Парабола.

713. 2 и $2/\sqrt{3}$. **714.** Окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **715.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **717.** $\frac{3}{2}$. **718.** -8. **719.** 6. **720.** $\frac{2}{3}$. **721.** n. **722.** $\frac{m}{n}$. **723.** -1. **724.** $\frac{a-b}{2}$. **725.** C_n^k. **726.** $\frac{ps}{qr}$. **727.** $\frac{1}{3}$. **728.** $\frac{5}{3}$. **729.** $\frac{1}{n}$. **730.** 1. **731.** 0. **732.** 0. **733.** -1. **734.** ± 1 при $x \to \pm\infty$. **735.** ± 1 при $x \to \pm\infty$. **736.** $-\frac{1}{2}$. **737.** -1. **738.** $a^2+a+\frac{1}{3}$. **739.** $^1/_3$. **740.** $^1/_2$. **741.** $^4/_3$. **742.** $\frac{1}{3}$. **743.** $^1/_2$. **744.** 1. **745.** $^1/_2$. **746.** $\frac{15}{2}$. **747.** 1. **748.** $\frac{1}{2}$. **749.** 2. **750.** 0, если $x \to +\infty$, и $+\infty$, если $x \to -\infty$. **751.** 0. **752.** ± 1. **753.** 0. **754.** $\frac{1}{2}$. **755.** 0. **756.** 0. **757.** $-\frac{1}{4}$. **758.** $\frac{1}{8}\sqrt{2}$. **759.** $(a_1+a_2+\ldots+a_n):n$. **760.** $\frac{2}{3}$. **761.** $\lambda=-1$, $\mu=0$. **762.** $\lambda=\sum\limits_{1}^{n}\sqrt{a_\nu}$, $\mu=\frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{n}\frac{b_\nu}{\sqrt{a_\nu}}$. **763.** $\frac{2}{n}\cdot a^{\frac{1}{n}-1}$. **764.** $\frac{313}{280}$. **765.** $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{6}}$. **766.** $2n$. **767.** 1, если $a>1$; 0, если $a<1$; $\frac{1}{2}$, если $a=1$. **768.** 0 при $a \neq 1$; $\frac{1}{2}$ при $a=1$. **769.** 1, если $a>1$; -1, если $a<1$; 0, если $a=1$. **770.** 0. **771.** 4. **772.** $\frac{2}{3}$. **773.** 5. **774.** $\frac{m}{n}$. **775.** $(-1)^{n-m}\cdot\frac{m}{n}$. **776.** 1. **777.** x. **778.** $\frac{1}{2}$. **779.** $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$. **780.** $\frac{2}{\pi}$. **781.** $\frac{1}{2}$. **782.** $2\cos a$. **783.** $-\sin a$. **784.** $-2\cos a$. **785.** 0. **786.** $-\frac{1}{4}$. **787.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **788.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **789.** $\frac{1}{4}$. **790.** 1. **791.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$. **792.** $-\frac{1}{3}$. **793.** $\frac{3}{2}$. **794.** 4. **795.** e^2. **796.** e. **797.** 0. **798.** e. **799.** e^3. **800.** $e^{\frac{3}{2}}$. **801.** 1. **802.** $e^{-\frac{1}{2}x^2}$. **803.** $e^{\lambda x}$. **804.** $e^{\operatorname{ctg} a}$. **805.** $e^{b \operatorname{ctg} a}$. **806.** e^{-1}. **807.** 1. **808.** e. **809.** 0. **810.** 0, если $x \to \frac{\pi}{4}$, оставаясь $>\frac{\pi}{4}$ $\left(x \to \frac{\pi}{4}+0\right)$; ∞, если $x \to \frac{\pi}{4}$, оставаясь $<\frac{\pi}{4}$ $\left(x \to \frac{\pi}{4}-0\right)$. **811.** 0. **812.** e^{-1}. **813.** $\frac{1}{10}M=0{,}043429\ldots$ **814.** -1. **815.** $-\frac{\pi^2}{2}$. **816.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. **817.** 2π. **818.** 1. **819.** 1. **820.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **821.** $\ln a$. **822.** $\ln a$. **823.** $(\ln a)^2$. **824.** $\ln a - \ln b$. **825.** $\alpha-\beta$. **826.** 1. **827.** $a^c \ln a$. **828.** a, если $a>1$; 1, если $a<1$. **829.** $\sqrt{ab}$. **830.** $\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m}$. **831.** 1. **832.** a. **845.** $\frac{1}{4}$. **846.** $\frac{1}{9}$. **861.** $x_n=\frac{a}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)+\frac{2b}{3}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$. **864.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, если $a<b$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b\cdot\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\varphi}$, если $a>b$. **868.** $1-\sqrt{1-x}$. **870.** $y=2x$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$y=\frac{3x+1}{2}$, если $1 \leqslant x \leqslant 3$; $y=x+2$, если $3 \leqslant x \leqslant 4$. **871.** u при $x>1$, и при $x<-1$; v при $x>1$; y при $-1 \leqslant x \leqslant 1$; z при $x<1$, и при $x>2$. **872.** y при $x \geqslant 3$, и при $x \leqslant -3$; z при любом x. **873.** y при $x>0$; z при любом x. **874.** Да. **875.** При $a=0$. **876.** При $x=n^2$, где n — целое, положительное. **877.** При $x=0$; $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}}=0$. **878.** $\lim\limits_{x \to 1-0} y=1$, $\lim\limits_{x \to 1+0} y=0$. **879.** Разрыв u при $x=\pm 2$; разрыв v при $x=\pm\sqrt{3}$; разрыв w при $x=0, +1, -1$. **880.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi n$. **881.** $x=\pi n$, кроме $n=0$. **882.** $x=0$. **883.** $x=0$. **884.** Нет. **885—946** и **957—965.** См. чертежи. **967.** Если ω_1 тот корень уравнения $\gamma\omega^2+(\delta-\alpha)\omega-\beta=0$, что $\left|\frac{\alpha-\gamma\omega_1}{\alpha-\gamma\omega_2}\right|<1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=\omega_1$. **968.** $6x^2-10x+7$. **969.** $4x^3-6x$. **970.** $1-x+x^2-x^3$. **971.** $7x^6-10x^4+3x^2$. **972.** $\frac{2}{(x+1)^2}$. **973.** $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. **974.** $-12x^{-5}+5x^{-6}$. **975.** $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$. **976.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **977.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **978.** $\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$. **979.** x^2e^x. **980.** $x\cos x+\sin x$. **981.** $x^2\cos x$. **982.** $\ln x$. **983.** $x^2\ln x$. **984.** $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}$. **985.** $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. **986.** $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **987.** $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. **988.** $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **989.** $2e^x\sin x$. **990.** $na(ax+b)^{n-1}$. **991.** $3\sin^2 x\cos x$. **992.** $10x(x^2-1)^4$. **993.** $-5\cos^4 x\sin x$. **994.** $\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$. **995.** $5\cos 5x$. **996.** $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **997.** $-e^{-x}$. **998.** $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **999.** $\operatorname{ctg} x$. **1000.** $-\frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}}$. **1001.** $\frac{2}{\sin 2x}$. **1002.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **1003.** $-2xe^{-x^2}$. **1004.** $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$. **1005.** $\frac{3x+2}{x^2+x}$. **1006.** $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$. **1007.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **1008.** $b\cos ax\cos bx-a\sin ax\sin bx$. **1009.** $-\frac{1}{1-x^2}$. **1010.** $e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$. **1011.** $-\frac{1}{\cos x}$. **1012.** $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **1013.** $\frac{1}{\cos x}$. **1014.** $x^3\ln^2 x$. **1015.** $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. **1016.** $\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$. **1017.** $-\frac{3\pi}{2\sin^4 \pi x}$. **1018.** $\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}$. **1019.** $2x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. **1020.** $\frac{4\cos 2\ln x}{x^3}$.

1021. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$. **1022.** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **1023.** $\dfrac{2x}{x^4-5x^2+6}$.

1024. $\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$. **1025.** $\dfrac{2x^3}{1-x^4}$. **1026.** $\dfrac{1}{\cos^8 x}$.

1027. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **1028.** $\operatorname{tg}^3 x$. **1029.** $\dfrac{1}{\cos^3 x}$. **1030.** $\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}$.

1031. $\sqrt{\dfrac{a}{a+be^x}}$. **1032.** $\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. **1033.** $\dfrac{xe^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

1034. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. **1035.** $\dfrac{n\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos nx}$. **1036.** $\dfrac{\ln x}{2\sqrt{1-x}}$.

1037. $\dfrac{2ax\ln x}{(a+bx^2)^2}$. **1038.** $\dfrac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}{2\sqrt{x}}$. **1039.** $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.

1040. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **1041.** $-\dfrac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$. **1042.** $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1043. $\operatorname{sign}(\cos x)$; $\cos x\neq 0$; $\operatorname{sign} a=\begin{cases}+1, & \text{когда } a>0,\\ -1, & \text{когда } a<0.\end{cases}$ **1044.** $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

1045. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. **1046.** $\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2+4x-4}}$. **1047.** $-\dfrac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$.

1048. $-\dfrac{1}{1+x^2}$. **1049.** $\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **1050.** $\dfrac{3\sigma}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sigma=\operatorname{sign}(4x^2-1)$; $x^2\neq\dfrac{1}{4}$. **1051.** $\dfrac{2\sigma}{1+x^2}$; $\sigma=\operatorname{sign}(1-x^2)$; $x^2\neq 1$. **1052.** $-\dfrac{2\sigma}{1+x^2}$; $\sigma=\operatorname{sign} x$; $x\neq 0$. **1053.** $\dfrac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. **1054.** $\dfrac{1}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$.

1055. $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$. **1056.** $\dfrac{1}{1+x^4}$. **1057.** $\dfrac{1}{a+b\cos x}$. **1058.** $\dfrac{1}{5+4\sin x}$.

1059. $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **1060.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$. **1061.** $\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{x^3}$.

1062. $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$. **1063.** $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x-1}}$. **1064.** $\dfrac{3\operatorname{arctg} x}{x^4}$.

1065. $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$. **1066.** $\sqrt{2\operatorname{ctg} x}$. **1067.** $2\sqrt{2\operatorname{ctg} x}$. **1068.** $\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}$.

1069. $\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})$. **1070.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **1071.** $-\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$. **1072.** $2x(\operatorname{arctg} x)^2$.

1073. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **1074.** $x^x(1+\ln x)$. **1075.** $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$.

1076. $\operatorname{sign} x$; $x\neq 0$. **1077.** $2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, если $x\neq 0$; $y'=0$ при $x=0$.

1078. $\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. **1079.** $\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$.

1080. $\dfrac{(2n-1)\sin(2n+1)x-(2n+1)\sin(2n-1)x}{4\sin^2 x}$. **1085.** 45°, 0°, -45°.

1086. -45°. **1087.** 45°. **1088.** 45° при $x=2n\pi$; -45° при $x=(2n+1)\pi$.

1089. $A=a$. **1090.** $a=e$. **1091.** 30°, 45°, 60°. **1092.** $a=4$. **1099.** $y=x+1$. **1100.** $y=x-2$. **1103.** $b^2-4ac=0$. **1104.** $4p^3+27q^2=0$. **1105.** $a=e^{\frac{1}{e}}$, $x=e$. **1107.** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$. **1108.** 45°. **1109.** $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$. **1111.** $y=2x-3$. **1112.** (4, 3) и (3, 7). **1113.** $\operatorname{tg}\alpha=17\pm12\sqrt{2}$. **1118.** При $x>0$ выпуклостью вниз, при $x<0$ — вверх. **1119.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **1120.** $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. **1121.** 120. **1122.** 0. **1123.** 12 960. **1124.** $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **1125.** $x^2(60\ln x+47)$. **1126.** $27a^{3x}\ln^3 a$. **1127.** $am(m+1)(m+2)(m+3)x^{-m-4}$. **1128.** $-6(x-1)^{-4}$. **1129.** $16e^{2x}(x^2+4x+3)$. **1130.** $27(3x^2\cos 3x+8x\sin 3x-4\cos 3x)$. **1131.** $2^{49}\cdot e^{2x}(2x^2+100x+1225)$. **1132.** $x^2\sin x-80x\cos x-1560\sin x$. **1133.** $-4e^x\sin x$. **1134.** $\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. **1135.** $-\frac{6x}{(x^2+1)^{5/2}}$. **1140.** $2(n!)(1-x)^{-n-1}$. **1141.** $(-1)^{n-1}n!\,ab^{n-1}\times(a+bx)^{-n-1}$. **1142.** $(-1)^{n-1}n!(\alpha\delta-\beta\gamma)\cdot\gamma^{n-1}(\gamma x+\delta)^{-n-1}$. **1143.** $(-1)^n n![x^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}]$. **1144.** $(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2^n}\times x^{-n+\frac{1}{2}}$. **1145.** $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **1146.** $m^{n-3}e^{mx}[m^3x^3+3nm^2x^2+3n(n-1)mx+n(n-1)(n-2)]$. **1147.** $a^nx^2\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)-n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. **1148.** $(-1)^n6\times(n-4)!\,x^{3-n}$, если $n\geqslant4$. **1149.** $(-1)^{n-1}a^n(n-1)!(ax+b)^{-n}$. **1150.** $(n-1)![(1-x)^{-n}-(-1)^n(1+x)^{-n}]$. **1151.** $\frac{3}{4}a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(3a)^n\sin\left(3ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. **1152.** $(-1)^n n!(1+x)^{-n-1}\left[\ln(1+x)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{n}\right]$. **1171.** $\frac{(\alpha^2+\beta^2)\beta e^{-\alpha t}}{(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)^3}$. **1172.** $\frac{\sin t(1+3\sin^2 t)}{a^2\cos^7 t}$. **1173.** $\frac{5\cos^2 t-4}{9a^2\sin^3 t\cos^7 t}$. **1174.** $-\frac{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}{a\sin^3 t}$. **1175.** $-\frac{n+1}{a}\times\frac{\cos n\varphi}{\sin^3(n+1)\varphi\cdot\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$. **1176.** $\frac{3}{16a^2}\cdot\frac{\cos 2t}{\left(\sin\frac{3t}{2}\right)^3\left(\cos\frac{t}{2}\right)^5}$. **1177.** $-\frac{b}{a^2}\times\frac{(1+2\cos t)^3}{\sin^3 t}$. **1178.** $-\frac{3}{25a^2}\cdot\frac{8-7\cos^2 t}{\sin t\cdot\cos^{13} t}$. **1179.** $\frac{1}{\left(4a\cos\frac{t}{2}+b\right)\cos^3\frac{t}{2}}$. **1180.** $\frac{n+1}{4n+2}\cdot\frac{1}{\sin nt\cdot\cos^3(n+1)t}$. **1181.** $-\frac{3b}{a^4}\cdot\frac{5-4\sin^2 t}{\sin^7 t}$. **1182.** $\frac{3b}{a^3}\times$

$\times \dfrac{(5\cos^2 t - 1)\sin t}{(3\cos^2 t - 1)^3 \cos^5 t}$. **1183.** $\dfrac{1}{16a^3} \cdot \dfrac{7 - 6\sin^2 \frac{t}{2}}{\sin^{10} \frac{t}{2}}$. **1184.** $\dfrac{1}{(at + b)\cos^3 t}$.

1185. $\dfrac{3t\sin t - \cos t}{a^2t^3 \cos^5 t}$. **1186.** $\dfrac{3\sin t - \cos t}{2a^2e^{2t}\cos^5 t}$. **1187.** $\dfrac{(\sin t - \cos t)\sin t}{ae^t \cos t}$.

1188. $\dfrac{3t\sin t - 2\cos t}{t^5 \cos^5 t}$. **1189.** $-\dfrac{3\cos^3 t}{4a\sin^4 t}$. **1190.** $-\dfrac{3b}{8a^3}\sin t\cos^3 t$.

1191. $-\dfrac{12t(1+t^4)^4}{(1-t^2)^3(1+4t^2+t^4)^3}$. **1192.** $\dfrac{b}{8a^2} \cdot \dfrac{(6t^2-1)(t^2+1)^3}{t^3}$. **1206.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. **1207.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6xy^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6x^2y + 9y^2$.

1208. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y$. **1209.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$. **1210.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = z^2 + 3x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2yz + 1$.

1211. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$. **1212.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

1213. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{3}{x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{5}{y^2}$. **1214.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2y + z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y + 2z$. **1215.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = zy^zx^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = zx^zy^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$. **1216.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$.

1217. $2\cos(x^2 + y^2) \cdot (x\,dx + y\,dy)$. **1218.** $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$. **1219.** $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \times \dfrac{2}{\sin \frac{2x}{y}}$. **1220.** $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **1221.** $\dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.

1222. $x^y\left(\dfrac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy\right)$. **1229.** $2 + 14\sqrt{3}$. **1230.** -18. **1231.** $-\dfrac{4}{5}$, $+\dfrac{4}{5}$. **1232.** $\pm \dfrac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}$, $\pm \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}$.

1233. 62. **1234.** $2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}$. **1235.** $\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. **1236.** $\dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$, 0, $\dfrac{-2y}{(1 + y^2)^2}$. **1237.** $(2 - y)\cos(x + y) - x\sin(x + y)$; $(1 - y)\cos(x + y) - (1 + x)\sin(x + y)$; $-(2 + x) \times \sin(x + y) - y\cos(x + y)$. **1238.** $x^{y-1}(1 + y\ln x)$. **1239.** $\dfrac{2}{(x + y)^3}$.

1240. $12\dfrac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}$. **1241.** $\dfrac{y^2 + z^2}{u^3}$, $\dfrac{x^2 + z^2}{u^3}$, $\dfrac{x^2 + y^2}{u^3}$.

1242. $(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)\,u$. **1243.** $2dx^2 - 2dx\,dy + 4dy^2$. **1244.** $2(y\,dx + x\,dy)^2 + 4xy\,dx\,dy$. **1245.** $[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2dx\,dy] \cdot u$. **1246.** $[(y\,dx - x\,dy)^2 -$

$-(x\,dx+y\,dy)^2](x^2+y^2)^{-2}$. **1247.** $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **1248.** $24(dx^4+4dx^3\,dy+2dx\,dy^2\,dz+3dx\,dy\,dz^2+dz^4)$. **1249.** $24(dx^4-3dx^2\,dy^2+dy^4)$. **1250.** $24(dx^4+3dx^3\,dy+dz^4)$. **1251.** $6\,dx\,dy\,dz$. **1252.** $-\dfrac{6(2dx+3dy-dz)^4}{(2x+3y-z)^4}$. **1253.** $d^3u=-\cos(2x+y)(2dx+dy)^3$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-8\cos(2x+y)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=-2\cos(2x+y)$. **1254.** $d^4u=\cos(x+y)\times(dx+dy)^4$; $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=\cos(x+y)$. **1255.** $d^4u=\dfrac{-6(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^4}{(ax+by+cz)^4}$. **1256.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=u$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=6u$. **1257.** $du=\varphi'(t)(x\,dy+y\,dx)$, $d^2u=\varphi''(t)(x\,dy+y\,dx)^2+2\varphi'(t)\,dx\,dy$. **1258.** $du=\varphi'(t)(2x\,dx+2y\,dy)$. $d^2u=4\varphi''(t)(x\,dx+y\,dy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$. **1259.** $du=2\varphi'(t)\times(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$, $d^2u=4\varphi''(t)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2\varphi'(t)\times(dx^2+dy^2+dz^2)$. **1260.** $d^2u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\times(a\,dx+b\,dy+c\,dz)(a_1\,dx+b_1\,dy+c_1\,dz)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(a_1\,dx+b_1\,dy+c_1\,dz)^2$. **1261.** $d^2u=a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}dx^2+b^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}dy^2+c^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}dz^2+2ab\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}dx\,dy+2ac\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\zeta}\times dx\,dz+2bc\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta}dy\,dz$. **1262.** $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}(dx+dy)+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}(dx-dy)$, $d^2u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(dx+dy)^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}(dx+dy)(dx-dy)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(dx-dy)^2$. **1263.** $d^2u=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}d\xi^2+2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}d\xi\,d\eta+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}d\eta^2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}d^2\xi+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}d^2\eta$. Здесь $d\xi=2x\,dx+2y\,dy$, $d\eta=x\,dy+y\,dx$; $d^2\xi=2dx^2+2dy^2$; $d^2\eta=2dx\,dy$. Поэтому, например, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\cdot 4xy+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}(2x^2+2y^2)+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}xy+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot 1$. **1264.** $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^\lambda\partial y^\mu\partial z^\nu}=a^\lambda b^\mu c^\nu\varphi^{(n)}(t)$; $\lambda+\mu+\nu=n$. **1265.** $a^n\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial\xi^n}$. **1267.** ρ. **1268.** $\rho^2\sin\varphi$. **1269.** $\dfrac{r}{a\rho\sin\varphi}$. **1270.** $\xi\eta^2$. **1277.** 0. **1278.** $r^2f''(r)$. **1279.** 0.

1301. $y'=-1$. **1302.** $x=0$, $x=a\sqrt[3]{2}$. **1303.** $y'=\dfrac{\dfrac{y}{x}-\ln y}{\dfrac{x}{y}-\ln x}$.

1304. $y'=-\dfrac{\sin y}{x\cos y+\sin y-2\sin 2y}$. **1305.** $y'=\dfrac{1}{1-\alpha\cos y}$, $y''=-\dfrac{\alpha\sin y}{(1-\alpha\cos y)^3}$. **1306.** $y'''=\dfrac{1}{3}$. **1307.** $\dfrac{4(x+y)}{(1+x+y)^3}$. **1308.** $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

1309. $(y-b)y^{IV}+4y'y'''+3y''^2=0$. **1310.** $y=\pm 1$. **1311.** $\pm\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$; $|b|\geqslant a>0$. **1312.** $y'=0$, $y'=\infty$. **1313.** $y'=1$, $z''=-\dfrac{2}{3}$.

1314. $y'=\frac{x(z-x)}{y(y-z)}$, $z'=\frac{x(y-x)}{z(z-y)}$. **1315.** $d^2y=-\frac{20y^2+16x^2}{25y^3}dx^2$, $d^2z=\frac{5z^2-x^2}{25z^3}dx^2$. **1316.** $x'=5$, $y''=12$. **1317.** $y'=\frac{z-x}{y-z}$, $z'=\frac{x-y}{y-z}$. **1318.** $y'=-1$, $z'=0$; $5y''=-4$. $5z''=4$. **1319.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+(z-1)^2}{(z-1)^3}$. **1320.** $(z^2-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-2zx^2y^2$. **1321** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. **1322.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. **1323.** $(x+y)\,dz=-(y+z)\,dx-(x+z)\,dy$; $(x+y)^2d^2z=2(y+z)\,dx^2+4z\,dx\,dy+2(z+x)\,dy^2$. **1324.** $d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx^2+2\frac{xy}{a^2b^2}dxdy+\frac{1}{b^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dy^2\right]$. **1325.** $d^2z=-\frac{2}{\sin^3 2z}[(\sin^2 2z\cos 2x+\sin^2 2x\cos 2z)\,dx^2+2\cos 2z\sin 2x\sin 2y\,dx\,dy+(\sin^2 2z\cos 2y+\sin^2 2y\cos 2z)\,dy^2]$. **1326.** $d^2z_A=\frac{1}{a}(dx^2-2\,dy^2)$. **1327.** $(x\varphi'+\psi')^3d^2z=[2(x\varphi'+\psi')\varphi\varphi'-(x\varphi''+\psi'')\varphi^2]\,dx^2+2[(x\varphi''+\psi'')\varphi-(x\varphi'+\psi')\varphi']\,dx\,dy-(x\varphi''+\psi'')\,dy^2$. **1329.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{55}{32}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{25}{32}$. **1330.** $\frac{dx}{dz}=\frac{\varphi'(t)}{2kt}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{\psi'(t)}{2kt}$. **1331.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}\sin v\operatorname{ctg}u$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}\cos v\operatorname{ctg}u$. **1333.** а) 2; б) 1. **1340.** $\frac{d^2x}{dy^2}+x=e^y$. **1341.** $\frac{d^3x}{dy^3}=0$. **1342.** $\frac{d^4x}{dy^4}=0$. **1343.** $\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$. **1344.** $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$. **1345.** $y_t'''-y_t''-y_t'+y=0$. **1346.** $y_t'''+by=0$. **1347.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **1350.** $\frac{d^2y}{dt^2}+a(e^{2t}+1)y=0$. **1351.** $\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}$. **1352.** $\frac{r'}{r}$. **1353.** $\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}$. **1354.** $\eta''+(b-1)\eta=\frac{1}{\operatorname{ch}^3\xi}$. **1355.** $v''+v=0$. **1356.** $u''-u'=\frac{A}{(\beta-\alpha)^2}u$. **1357.** $t\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **1358.** $y\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{dz}{dy}=0$. **1361.** $\frac{\partial z}{\partial u}=0$. **1362.** $u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0$. **1363.** $\frac{\partial z}{\partial u}=0$. **1364.** $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$. **1365.** $r\frac{\partial u}{\partial r}\cos 2\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin 2\varphi$. **1366.** $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$. **1367.** $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. **1368.** $\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$. **1369.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. **1370.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2(u^2+v^2)z=0$. **1371.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial u}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+$

$+u^2v^2z=0.$ **1372.** $\alpha=\frac{1}{a}$, $\beta=\frac{1}{b}$ или $\alpha=\frac{1}{b}$, $\beta=\frac{1}{a}$, $a\neq b$.
1373. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$ **1374.** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$ **1375.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **1376.** $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+u=0.$
1377. $r^3u^{IV}+2r^2u'''-ru''+u'=0.$ **1378.** $u\varphi''+\varphi'+a\varphi=0.$ **1379.** $u''+$ $+\frac{2}{r}u'+u=0.$ **1380.** $\Delta_1 v=\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2$, $\Delta_2 v=$ $=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}$. **1391.** $-1<x<1.$
1392. $x>\frac{3}{4}$. **1421.** $y_{max}=9.$ **1422.** $y_{min}=-16.$ **1423.** $y_{max}=16$ при $x=-2$, $y_{min}=-16$ при $x=+2$. **1426.** Экстремума нет.
1427. $y_{max}=4$ при $x=1$, $y_{min}=-28$ при $x=5$
1428. $y_{min}=a$ при $x=b$. **1429.** Экстремума нет.

	y_{max}	y_{min}
1430.	$x=2$	$x=1,\ 3$
1431.	$x=1$	$x=3$
1432.	$x=0$	$x=4$
1433.	$x=1$	$x=-1$
1434.	$x=-1$	$x=+1$
1435.	$x=\frac{a^2}{a-b}$	$x=\frac{a^2}{a+b}$
1436.	$x=4$	$x=16$
1437.		$x=\pm 1$
1438.	$x=\pm\sqrt{2}$	$x=0$
1439.		$x=e^{-1}$
1440.		$x=e^{-1/2}$
1441.		$x=e^{-1}$
1442.	$x=e^{-2}$	$x=1$
1443.	$x=n$	$x=0$ (если n — четное)
1444.	$x=\pm 1$	$x=0$
1445.		$x=0$
1446.	$x=\ln 2$	
1447.	$x={}^9/_{11}$; $x=2$	$x=-2;\ +1$
1448.	Функция только возрастает.	
1449.	$x=\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{5}{4}\pi$

	y_{max}	y_{min}
1450.	1) $x=\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{3}{2}\pi$ если $2e^2<1$
	2) $x=\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$,
	α	$2\pi-\alpha$, если $2e^2>1$, $\sin\alpha=$ $=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$
1451.		$x=\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$
1452.	$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{7}{8}\pi$	$x=0;\ \frac{3}{8}\pi$ $\frac{5}{8}\pi$
1453.	$x=\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$
1454.	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$
1455.	$x=-\frac{1}{2}$	

	y_{max}	y_{min}		y_{max}	y_{min}
1456.	$x=+\frac{1}{2}$ $(y=2)$		**1460.**	y всегда убывает.	
1457.	$x=+a$, если $a<0$	$x=a$, если $a>0$	**1461.**	$x=a\sqrt[3]{2}$ $(y=a\sqrt[3]{4})$	
1458.	$x=1$ $(y=1)$		**1462.**	$x=\sqrt[8]{3}$ $(y=\sqrt[8]{27})$	$x=-\sqrt[8]{3}$ $(y=-\sqrt[8]{27})$
1459.	$x=1$ $(y=0)$	$x=\frac{1}{2}$, $\left(y=-\frac{1}{2}\right)$	**1463.**	$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x=0$ для $y>0$

	y_{max}	y_{min}	Примечание
1464.	$x=-a$	$x=a$	$x=0$ — точка перегиба, асимптот нет.
1465.		$x=0$	$x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ — точка перегиба, асимптота $y=a$.
1466.	$x=-1$	$x=1$	$x=0$ — точка перегиба, асимптот нет.
1467.			$x=1{,}331$ — точка перегиба, а асимптоты $x=-1$; $y=0$, $x=4$.
1468.	$x=0$ $(y=a)$		$x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ — точка перегиба, асимптота $y=0$.
1469.	$x=0$ $(y=A)$		$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ — точка перегиба, асимптота $y=0$.
1470.	$x=na$	$x=0$ (если n четное)	$y=0$ — асимптота вправо, $x=n\pm\sqrt{n}$ — точка перегиба и $x=0$ при n — нечетном.
1471.	$x=\pm a$	$x=0$	$x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{5\pm\sqrt{17}}$ — точка перегиба, $y=0$ асимптота.

1472 и **1473.** См. чертежи. **1474.** Убывающая функция; асимптоты $x=0$, $x=\pm 1$, $y=0$. **1475.** Асимптоты: $x=1$; $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$ — точка перегиба. **1476.** Асимптоты: $x=1$; $x=3$; $y=1$; $x=\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25})$ — точка перегиба. **1477.** Асимптоты: $x=-1$; $y=\pm 1$. Область существования $|x|\geqslant 1$. **1478—1494.** (см. чертежи). **1495.** Сдвинутая синусоида с периодом $\frac{\pi}{2}$. **1496—1499** (см. чертежи). **1500.** Асимптота: $y=0$. Экстремумы при x, равных корням уравнения $x=\operatorname{tg} x$. Затухающие волны. **1501.** Волны постоянной амплитуды с уменьшающейся длиной. **1502—1506.** См. чертежи. **1507.** Два. **1508.** Два. **1509.** Если $a<1$ — один, если $a>1$ — три.

1510. Если $a > 0$ — один, если $-\frac{1}{e} < a < 0$ — два, если $a < -\frac{1}{e}$ — нет корней. **1511.** Если $a > \frac{1}{e}$ — нет корней, если $0 < a < \frac{1}{e}$ — два корня, если $a < 0$ — один корень. **1514.** $m < 11$. **1515.** $m > 175$, $27m < -188$. **1516.** $0 < 16m < 621$. **1517.** $m = 72$, $27m = -800$. **1518.** $m = -1$. **1519.** $m > 0$. **1520.** $2m = \pm(3\pi - 2)$. **1521.** $s = a^2$. **1522.** $s = 2a^2$. **1523.** Сторона, параллельная основанию сегмента, стягивает дугу 2φ, где $4\cos\varphi = \cos\alpha + \sqrt{8 + \cos^2\alpha}$. **1524.** $\frac{2m^3}{3p\sqrt{3}}$. **1525.** $\frac{ah}{4}$. **1526.** x — сторона вырезанных квадратов, $6x = a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}$. **1527.** $y = x\sqrt{2}$, если x — ширина, y — высота. **1528.** $a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **1529.** $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$. **1530.** πm^3. **1531.** $2\pi a^2$. **1532.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **1533.** $\frac{\pi a h^2}{4}$. **1534.** $\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{8}{27}$. **1535.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **1536.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **1537.** $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{3}}$. **1538.** $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. **1539.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. **1540.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1541.** $\pi\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{v^2}{2}}$. **1542.** Основание равно $\frac{p}{2}$. **1543.** $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{5\pi}}$. **1544.** $r^2(v_1^2 + v_2^2) = (av_2 - bv_1)^2$. **1545.** $d^2 = (lt + a - x_1)^2 + (mt + b - y_1)^2 + (nt + c - z_1)^2$, $t = [l(x_1 - a) + m(y_1 - b) + n(z_1 - c)] : (l^2 + m^2 + n^2)$. **1547.** Если $x = av_1 : \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$ оказывается $< b$, то ломаная ACB, где $C(x, 0)$. Если $x > b$, то скорейший путь — прямая AB. **1548.** $l = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. **1549.** $mx^2 = 2ap$ при $p > \frac{ma}{2}$. **1550.** $t(v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha) = lv + l_1v_1 - (l_1v + lv_1)\cos\alpha$. **1551.** При $l > 4a$ равновесия нет. При $l < 4a$ угол наклона φ определяется равенством $16a\cos\varphi = l + \sqrt{l^2 + 128a^2}$. **1552.** Если φ — угол наклона стержня к горизонту, то $2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\varphi = \sin(\alpha - \beta)$. **1553.** Когда квадраты расстояний точки до центров относятся как кубы радиусов. **1554.** $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **1555.** Отверстие должно быть на середине высоты. **1556.** $4b\cos\varphi = \sqrt{a^2 + 8b^2} - a$. **1557.** $\frac{p^2}{2(\pi + 4)}$. **1558.** Отношение должно быть равно $\frac{b}{a}$, **1559.** $r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, если $a < \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$. **1560.** $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}$; $\max\sin(\psi - \varphi) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}$. **1561.** $(\sqrt{Hh}, 0)$.

1562. $OM = a + \sqrt{ab}$. **1563.** Отрезок прямой внутри угла должен данной точкой делиться пополам. **1564.** $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}$, если φ — угол наклона искомых плоскостей к основанию. **1565.** Плоскость делит ребра пополам.

1566. Вершина в середине стороны. **1567.** $\frac{\sqrt{3}}{2}lr$ — где l — образующая, r — радиус основания. **1568.** Третья касательная перпендикулярна к биссектрисе угла между первыми двумя. **1569.** Наклон прямой φ дается формулой $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. **1570.** Наклон определяется из уравнения: $a\cos\varphi - b\sin\varphi = a - b$. **1571.** $x = \frac{a}{2}$. **1572.** $x = a\cdot n^{\frac{3}{2(n+1)}}$, $y = \frac{x}{n\sqrt{n}}$. **1573.** $x = a\cdot n^{\frac{1}{2(n+1)}}$, $h = a\cdot n^{\frac{1}{2(n+1)}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}$. **1574.** $x = a - \frac{p}{2}$, если $a > \frac{p}{2}$; $x = 0$, если $a < \frac{p}{2}$. **1575.** $x = p$, $L_{\min} = 3p\sqrt{3}$. **1576.** Нормаль с осью параболы должна составлять 45°. **1577.** ab. **1578.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. **1579.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$. **1580.** $d = a - b$. **1581.** $d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, если $a > b\sqrt{2}$; $d = 2b$, если $a < b\sqrt{2}$. **1582.** $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{2}Ry = 0$, $S_{\max} = \frac{2\pi R^2}{3\sqrt{3}}$. **1583.** $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_1 - a = (x_0 - x_1)\sqrt{2}$; в $3 + 2\sqrt{2}$ раз. **1584.** Абсциссы вершин составляют арифметическую прогрессию. **1589.** $\frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{11}{18}$. **1592.** Сходится при $-1 \leqslant x < 1$. **1593.** Сходится при $-1 < x < 1$. **1594.** Сходится при $-1 < x \leqslant 1$. **1595.** Сходится при любом x. **1596.** Сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **1597.** Сходится при любых x, кроме целых отрицательных и нуля. **1598.** Сходится при любом x, кроме 0. **1599.** Сходится при любом x. **1600.** Расходится при любом x, кроме 0. **1601.** Сходится при $-1 < x < +1$ **1602.** Сходится при $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$. **1603.** Сходится при $-e \leqslant x < e$. **1604.** Сходится при $-2 \leqslant x < 2$. **1605.** Сходится при $-1 \leqslant x < 3$. **1606.** Сходится при $x > \frac{1}{2}$ и при $x \leqslant -\frac{1}{2}$. **1607.** Сходится при $2 \leqslant x < 4$. **1608.** Сходится при $x \geqslant -1$. **1609.** Сходится при $|x| > 2$ и при $|x| < \frac{1}{2}$. **1610.** Сходится при $k\pi - \frac{\pi}{4} < x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{4}$. **1611.** Сходится при $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}$. **1612.** Сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **1613.** Сходится при $x > 0$. **1614.** Сходится. **1620.** Расходится. **1621.** Сходится. **1622.** Расходится. **1623.** Сходится. **1624.** а) Сходится, б) сходится при $\sigma > 0$. **1625.** Сходится. **1626.** Сходится. **1627.** Сходится. **1628.** Сходится при любом x. **1629.** Сходится при всех x, кроме $x = k\pi$. **1630.** Сходится. **1631.** Сходится. **1649.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$. **1651.** $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$. **1652.** $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 +$

$+(x+1)^5$. **1657.** $\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$. **1658.** $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

1659. $\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. **1660.** $-\frac{\sin nx\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}}$.

1661. $\frac{(-1)^{n-1}\sin^2 2nx-[1+(-1)^{n-1}]\sin^2 x}{2\cos 2x}$. **1662.** $\frac{x\sin a-x^n\sin na}{1-2x\cos a+x^2}+$ $+\frac{x^{n+1}\sin(n-1)a}{1-2x\cos a+x^2}$. **1676.** $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$. **1677.** $2\left[\frac{x}{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5+\ldots\right]$ при $|x|<a$.

1678. $-2\sum_1^\infty\cos\frac{\pi n}{3}\frac{x^n}{n}$, $|x|<1$. **1679.** $\ln 2-\sum_1^\infty(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}$; $|x|<1$.

1680. $1+\frac{3x}{2}+2\sum_2^\infty(-1)^n\frac{x^n}{n(n^2-1)}$; $|x|<1$. **1689.** $\frac{1}{(1-x)^2}$; $|x|<1$.

1690. $(1-x)^2 s=1+x$; $|x|<1$. **1691.** $(1-x)^3 s=1+x$; $|x|<1$.
1692. $(1-x-x^2-x^3)s=1$; $|x|<1$. **1693.** $ss_1=1+2x^2+3x^4+$ $+4x^6+\ldots$; $|x|<1$. **1699.** $\sum_0^\infty(-x)^n=\frac{1}{1+x}$. **1700.** $\sum_0^\infty(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$.

1701. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ **1702.** $S'(x)=S(x)$. **1718.** $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-$ $-\frac{x^4}{192}+\ldots$ **1719.** $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$ **1720.** $1+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{6}x^4+\ldots$

1721. $-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{1}{720}x^3+\frac{1}{30\,240}x^5-\ldots$ **1722.** a) $\frac{3}{2}$, b) $4\frac{9}{10}$, c) $9\frac{1}{6}$, d) $15\frac{1}{3}$, e) $15\frac{1}{2}$. **1723.** $3\frac{2}{405}$, $2\frac{1}{448}$, $2\frac{1}{768}$, $2\frac{3}{5120}$. **1725.** a) 3,1071, b) 4,12121, c) 7,937008, d) 3,017089, e) 7,74603, f) 9,16514. **1726.** $\sqrt[3]{2}=$ $=1{,}2599210499$. **1727.** $\sqrt{2}=1{,}4142135624$. **1728.** $\ln 2=0{,}6931471806$; $\ln 3=1{,}0986122886$; $\ln 5=1{,}6094379124$; $\ln 10=2{,}3025850930$. **1733.** 1,4′.
1734. $\sim$114 раз. **1735.** $\sim$41′. **1736.** Около 3 *мм* и 11 *м*.
1737. $\sim$на 1,4 *м*. **1739.** 11,99. **1740.** 0,01745. **1741.** 0,99985.
1742. 0,1736. **1743.** 3,1415926536. **1744.** 506 и 148. **1746.** $-\frac{1}{m}$.

1747. $-\frac{3}{5}$. **1748.** $\frac{1}{2}$. **1749.** $-\frac{1}{2}$. **1750.** $\frac{a^2}{b^2}$. **1751.** 2. **1752.** 0. **1753.** 0.

1754. $\frac{2}{\pi}$. **1755.** 1. **1756.** 1. **1757.** 0. **1758.** 0. **1759.** 1. **1760.** 0.

1761. $\frac{1}{2}$. **1762.** $\frac{2}{3}$. **1763.** 1. **1764.** $-\frac{1}{3}$. **1765.** $-e$. **1766.** 4. **1767.** $f''(x)$.

1768. $f'''(x)$. **1769.** 1. **1770.** 0. **1771.** 1. **1772.** e^{-1}. **1773.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **1774.** $e^{-\frac{a^2}{2}}$. **1775.** 1. **1776.** 1. **1777.** 0. **1778.** 0. **1779.** $-\frac{e}{2}$. **1780.** $-\frac{1}{2}$, если $x \to 0$, оставаясь >0; $+\infty$, если $x \to 0$, оставаясь <0. **1781.** $\frac{2}{3}$. **1782.** $\frac{4}{3}$. **1783.** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. **1784.** $s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2g}{a^2}$ и $s = \frac{gt^2}{2}$. **1785.** Минимум $z = -3(a^2 + b^2 - ab)$ при $x = 2a - b$, $y = 2b - a$. **1786.** Максимум при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$. **1787.** Минимум при $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; при $x = 0$, $y = 0$ нет экстремального значения. **1788.** Минимум при $3x = -4$, $3y = 1$. **1789.** Минимум при $x = y = a \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$. **1790.** При $x = y = a$ минимум, если $a > 0$; максимум, если $a < 0$. **1791.** Если кривая $z = 0$ — эллипс, а точка (x_c, y_c) — его центр, то при $x = x_c$, $y = y_c$ максимум, если $A < 0$, и минимум, если $A > 0$. Если кривая $z = 0$ — не эллипс, то экстремального значения z нет. **1792.** Минимум z при $x = y = 3$. Максимум $z = a^3 + 27$, если $a \leqslant 9$, и $2a^3 - 9a^2 + 27$, если $a > 9$. **1793.** Максимум при $x = a$, $y = a$ и равен $2a^4$, минимум при $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 1$ и равен -1. **1794.** Если $a > b$, то максимум при $x = \pm 1$, $y = 0$. Если $a < b$, то максимум при $x = 0$, $y = \pm 1$. Если $a = b$, то максимум при $x^2 + y^2 = 1$. Наименьшее значение — при $x = y = 0$. **1795.** Максимум при $3x = 3y = 2a$. **1796.** Максимум при $ax = b$, $ay = c$. **1797.** Максимум при $3x = 3y = \pi$ **1798.** Максимум при $6x = 6y = \pi$ и $6x = 6y = 5\pi$, минимум при $2x = 2y = 3\pi$ **1799.** Минимум при $3x = 3y = \pi$ или 2π, максимум $z = 1$. **1800.** $x - y = 2n\pi$ — максимум, $x - y = (2n + 1)\pi$ — минимум, если $ab > 0$. Если $ab < 0$. то наоборот. **1801.** При $x = \alpha$, $y = \beta$ — максимум, при $x = \pi - \alpha$, $y = \pi + \beta$ — минимум. **1802.** Максимум при $x = y = z = a$. При $x = y = z = 0$ нет экстремального значения. **1803.** Минимум при $3x = -2$; $3y = -1$, $z = -1$. **1804.** Минимум при $x = y = z$. **1805.** Минимум при $x = y = z$. **1806.** Максимум при $mx = a$, $my = b$, $mz = c$; минимум при $mx = -a$; $my = -b$; $mz = -c$; $m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. **1807.** Числа $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ должны составлять геометрическую прогрессию. **1808.** Минимум z при $x = -2$, $y = 0$. Максимум при $7x = 16$, $y = 0$. **1809.** Минимум z при $3x = -1 - \sqrt{6}$, $3y = 2$, максимум при $3x = -1 + \sqrt{6}$, $3y = 2$. **1810.** Максимум z при $3x = -1$, $3y = 2$, минимум при тех же значениях. **1811.** Максимум при $x = y = 1$, минимум при $x = y = -1$. **1812.** При $x = 1$, $y = 2$ нет экстремального значения. **1813.** При $\pm x = a$; $\pm y = a$ максимум $z = a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$, минимум $z = -a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$. При $x = 0$, $y = 0$ минимум $z = a\sqrt{2}$, максимум $z = -a\sqrt{2}$. **1814.** Максимум при $x = y = -a\sqrt{2}$, минимум при $x = y = a\sqrt{2}$. **1815.** Минимум при $x = y = a$. **1816.** Минимум при $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = a$. **1817.** Максимум при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$. **1818.** Максимум при $x\sqrt{2} = y\sqrt{2} = \pm 1$, минимум при $x\sqrt{2} = -y\sqrt{2} = \pm 1$. **1819.** Максимум при $x = y = z = +1$, при $x = -y = -z = +1$

и т. д., минимум при $x = y = z = -1$, $x = -y = -z = -1$ и т. д. Максимум $u = 1$, минимум $u = -1$. **1820.** Минимум при $x = t\sqrt{a}$, $y = t\sqrt{b}$, $z = t\sqrt{c}$; $t = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. **1821.** Максимум u равен $\left(\frac{a}{9}\right)^9$. **1822.** Минимум равен $\frac{1}{7}(12 - \sqrt{18})$, максимум $\frac{1}{7}(12 + \sqrt{18})$. **1823.** Наибольшее значение $\frac{112}{27}$, наименьшее 4. **1824.** Экстремальные значения u являются корнями уравнения $\frac{l^2}{u - a^2} + \frac{m^2}{u - b^2} + \frac{n^2}{u - c^2} = 0$. **1825.** Наибольшее значение $\frac{1}{8}$, наименьшее 0. **1826.** Максимум при $3x = \pi$, $6y = \pi$, наименьшее значение 0. **1827.** Минимум равен $\frac{1}{p}(\sqrt{\alpha_1\beta_1} + \sqrt{\alpha_2\beta_2} + \ldots + \sqrt{\alpha_n\beta_n})^2$. **1828.** Экстремальные значения в точках, где главные диаметры поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = M$ пересекают шар $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **1829.** Экстремальные значения там, где оси симметрии эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $lx + my + cz = 0$ пересекают шар $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1833. Равносторонний. **1834.** Равнобедренный. **1835.** Длина равна $\sqrt{2ab}\sin\frac{\varphi}{2}$, где a, b — стороны треугольника, φ — угол между ними. **1837.** Ортоцентрический треугольник, вершины которого в основаниях высот данного. **1838.** Прямоугольник. **1839.** Координаты искомой точки равны арифметическим средним координат вершин. **1840.** Координаты ее равны арифметическим средним координат данных точек. **1841.** Площадь четырехугольника, вписанного в круг. **1842.** Многоугольник, вписанный в круг. **1843.** Площадь $\frac{n}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}$ правильного многоугольника. **1844.** Площадь $na^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ правильного многоугольника. **1845.** Равносторонний треугольник. **1846.** Площадь его $2R^2\sin\alpha$, где R — радиус круга. **1847.** Если s — площадь треугольника, a, b, c — стороны, x, y, z — расстояния точки до сторон, то $\delta \cdot x = 2sa$; $\delta \cdot y = 2sb$, $\delta \cdot z = 2sc$; $\delta = (a^2 + b^2 + c^2)$. **1848.** Плоскость, перпендикулярная к радиусу-вектору, проведенному из начала в данную точку. **1849.** Точка $(a, 0, 0)$, если $a > b > c$. **1850.** a^3. **1851.** a^3. **1852.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$. **1853.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. **1854.** $x = y = 2z = \sqrt[3]{2v}$. **1855.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. **1856.** Высота параллелепипеда равна $\frac{h}{3}$, где h — высота конуса. **1857.** Если R — радиус основания конуса, то $\pi R^2\sqrt{3} = S$. **1858.** $R = l$. **1859.** Касательная в этой точке должна быть параллельна прямой, соединяющей данные точки. **1860.** $p\sqrt{5}$. **1861.** Высота сегмента должна составлять $\frac{3}{4}$ высоты треугольника. **1862.** Основание должно проходить через середину другой полуоси. **1863.** Абсцисса искомой точки x находится из равенства $(a^2 - b^2)x^2 = ma^2$, если $|am| < a^2 - b^2$. При $|am| > a^2 - b^2$ должно быть $x = a\,\operatorname{sign} m$. **1864.** Равнобедренный треугольник с вершиной на другой оси. **1865.** Нормаль должна проходить через точки $\left(\pm\sqrt{\frac{a^3}{a+b}};\ \pm\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$. **1866.** Если $a^2 > 2b^2$, то нормаль проходит через точку $x = \pm a^2\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^4-b^4}}$, $y = \pm b^2\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^4-b^4}}$. Если же $a^2 < 2b^2$, то нормаль совпадает с малой осью эллипса. **1867.** $x\sqrt{a+b} = \pm\sqrt{a^3}$; $y\sqrt{a+b} = \pm\sqrt{b^3}$. Здесь x и y — координаты точки касания. **1868.** $S\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2} = \pi\, abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. **1869.** $\frac{x}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y}{b^{\frac{2}{3}}}+\frac{z}{c^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}$. **1871.** $2V = abh^2$; $\left(\frac{a\sqrt{h}}{2};\ \frac{b\sqrt{h}}{2};\ \frac{h}{2}\right)$ — вершина параллелепипеда. **1872.** $\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}} = \sqrt{a+b+c}$ — одна из восьми плоскостей. **1873.** Точка касания плоскости $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{b}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. **1874.** Уравнение контура эксцентрика в полярных координатах имеет вид: $r = a + b\cos(n\varphi+\alpha)$. **1875.** Контур диска должен состоять из двух спиралей Архимеда $r = a\varphi$. **1876.** Синусоидой. **1879.** Астроида $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **1880.** $(x^2+y^2)^3 = l^2x^2y^2$. **1881.** $(x^2+y^2)^2 = ax(x^2-y^2)$. (Точка O принята за начало координат, прямая OO_1 — за ось Ox.) **1882.** $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2 = 1$. **1883.** $r^2(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x-a)^2(x^2+y^2)$. **1884.** $(x^2-xy+y^2)^2+y^4 = 4a^2y^2$. **1885.** $(x^2+y^2)y^2 = a^2x^2$. **1886.** Две улитки Паскаля. **1887.** Лемниската. **1888.** То же. **1889.** В полярных координатах $(r^2-c^2)\sin\varphi = \pm a^2$. При этом полюс — в середине отрезка между данными точками, а полярной осью служит сам отрезок. **1890.** $(b^2x^2+a^2y^2)^2(a^6y^2+b^6x^2) = a^4b^4(a^2-b^2)^2x^2y^2$. **1891.** Окружность или лемниската (в зависимости от того, находятся ли вращающиеся стержни по одну или по разные стороны от оси Ox). **1894.** Парабола. **1895.** Часть прямой $x-y=2$, где $x\geqslant 2$. **1896.** Отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$, заключенный между осями. **1897.** Часть параболы $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$, заключенная между точками $(a, 0)$ и $(0, a)$. **1898.** $(2, 2)$ — самая левая, $(6, -2)$ самая низкая точка. **1899.** $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. **1900.** $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$. **1901.** $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at}{1+t^2}$. **1908.** $t_1t_2t_3(t_1+t_2+t_3)+(t_1+t_2+t_3)^2+3 = t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3$. **1910.** $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1+1 = 0$. **1911.** $t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4+t_1+t_2+t_3+t_4 = 0$. **1913.** Пересечением лемнискаты с окружностью $x^2+y^2 = at(x-y)$ получим при соответствующем t любую точку кривой. Ее координаты выразятся формулами $x = a\frac{t(t^2+1)}{t^4+1}$, $y = a\frac{t(t^2-1)}{t^4+1}$. **1916.** 45°. **1917.** $\pm a = b$.

1918. $a=1$. **1919.** $y=x$. **1920.** $x=0$ и $y=0$. **1921.** $y=\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}$. **1925.** $\mu=\frac{\varphi}{2}+90^\circ$. **1926.** $y=x$. **1927.** $x-y-3=0$. **1928.** $6x-5y+21=0$. **1929.** Одна из нормалей: $4x-2y-3a=0$. **1930.** $x=2\pi a$. **1931.** Нормали в точках, где $\varphi=\pm 30^\circ$ и $\varphi=\pm 150^\circ$. **1932.** $(a, \pm a\sqrt{2})$. **1933.** $x-y=4$. **1934.** $d=\frac{3a^3x_0}{\sqrt{x_0^6+4a^6}}$. **1935.** $(x\pm y)\sqrt{2}=\pm a$. **1946.** $l=a$. **1947.** $l=2a$. **1948.** $d=at$. **1949.** $d=\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}e^{k\varphi}$. **1950.** $d_1d_2=b^2$. **1951.** $(a^4\sin^2 t_1+ b^4\cos^2 t_1)\,d = 2ab\,(b^2\cos^2 t_1 + a^2\sin^2 t_1)\sqrt{a^2\sin^2 t_1+b^2\cos^2 t_1}$. **1952.** 1. **1962.** Подкасательная $\frac{2r^3}{a^2}$, поднормаль $\frac{a^2}{2r}$. **1965.** Центр одного из кругов в точке, где $x=\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{\sqrt{41}}\right)a$, $y=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)a$. **1966.** Центр одного из кругов в точке (x, y), где $x\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})\,a$, $y\sqrt{5}=(6+\sqrt{5})\,a$. **1967.** Центр круга в точке (x, y); $8x\sqrt{2}=(\pi-4)\,a$; $8y\sqrt{2}=(\pi+4)\,a$. **1979.** Тангенс наибольшей разности равен $\frac{a^2-b^2}{2ab}$, сама она — около $11'$. **1981.** $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. **1982.** Циссоида, асимптотой которой служит директриса параболы. **1983.** $x=0$ — касательная в вершине. **1984.** Лемниската. **1985.** $(ax)^{\frac{n}{n-1}}\pm(by)^{\frac{n}{n-1}}=(x^2+y^2)^{\frac{n}{n-1}}$. **1986.** Логарифмическая спираль. **1987.** Кардиоида $r=a(1+\cos\varphi)$. **1988.** $r^{\frac{n}{n+1}}=a^{\frac{n}{n+1}}\cos\frac{n\varphi}{n+1}$. **1989.** Спираль Архимеда (см. ответ на задачу 1875). **1991.** Циссоида. **1992.** Окружность. **1993.** Окружность. **1994.** $x^2+y^2=a^2-b^2$, $a^2>b^2$; при $a^2<b^2$ таких углов нет. **1995.** $2(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$. **1996.** Парабола. **1997.** $x=a\left(\frac{\pi}{2}+t-\frac{\pi}{2}\cos t\right)$, $y=a\left(2+\frac{\pi}{2}\sin t\right)$, где t — тот же параметр, что и у циклоиды. **1998.** Удлиненная циклоида Делагира:

$$\begin{cases} x=a\theta-\dfrac{a\alpha}{\sin\alpha}\sin\theta, \\ y=\left(2+\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)a+\dfrac{a\alpha}{\sin\alpha}\cos\theta. \end{cases}$$

2000. Парабола. **2002.** $y^3+x^2\left(y+\frac{1}{2a}\right)=0$. **2004.** $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2+b^2y^2)$. **2005.** При $x<0$. **2006.** Выпуклость обращена к оси x. **2007.** Вогнутость к оси Oy. **2008.** Выпуклость к полюсу. **2011.** 112 и 111 *км*. **2012.** $\sqrt{\frac{(2a+3x)^3x}{3a^2}}$. **2013.** p. **2014.** $\frac{5}{3}\sqrt{10}$. **2015.** $\frac{13}{6}\sqrt{13}$. **2016.** a. **2017.** $\frac{a}{\cos\frac{x}{a}}$. **2018.** $\frac{a\sqrt{2}}{n-1}$. **2019.** $2a$. **2020.** at. **2021.** $4a\sin\frac{t}{2}$. **2022.** $\frac{4a}{3}\cos\frac{\varphi}{2}$. **2023.** $\frac{a}{3}$. **2024.** $R=4a\cos\frac{t}{2}+b$. **2025.** $R=2ae^{-t}$.

2026. $8a\cos^3 t$. **2027.** $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. **2028.** На конце большой оси равна $\frac{a}{b^2}$; $a>b$. **2029.** В точке (0, 0) равна $\frac{2}{a}$. **2030.** В точке $(0, a)$ равна $\frac{1}{a}$. **2032.** $(2a, 2a)$.

2033. $x_c = -\frac{a(2a^3-x^3)}{(2a+x)(a-x)^2}$, $y_c=\frac{2a(a+x)^{\frac{3}{2}}}{(2a+x)\sqrt{a-x}}$. **2034.** $(e^{-1}, 0)$.

2035. $x_c=\frac{a}{2}+\frac{a}{6}(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y_c=\frac{a}{6}(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$. **2036.** $x_c= \frac{3a\cos^2\varphi(1+8\sin^4\varphi)}{4(1+2\sin^2\varphi)}$, $y_c=-\frac{6a\sin^3\varphi\cos^3\varphi}{1+2\sin^2\varphi}$. **2044.** $a-b$. **2047.** $y= \sqrt{2b(a+b)}\left(\frac{x}{a+b}-1+\sqrt{1-\frac{x}{a+b}}\right)$. **2048.** $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$. **2049.** $y=\frac{h}{8}\left[3\left(\frac{x}{a}\right)^5-10\left(\frac{x}{a}\right)^3+15\frac{x}{a}\right]$. **2055.** Окружность $x^2+y^2=ay$, где $2a$ — радиус кривизны в данной точке (касательная в данной точке принята за ось Ox, нормаль — за ось Oy). **2056.** $x=a\cos t\cos 2t$, $y=-b\sin t\cos 2t$. **2057.** $(a^2x^2-b^2y^2)^2=(x^2+y^2)^3(a^2x^2+b^2y^2)$.

2058. $27py^2=8(x-p)^3$. **2059.** $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

2060. $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$. **2061.** Астроида $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

2062. $\left(\frac{3y}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3y}{8}\right)^2+3a^3x=0$. **2063.** $(x+y)^{\frac{2}{3}}-(x-y)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{16a^2}$.

2064. $x=a\ln\frac{y+\sqrt{y^2-4a^2}}{2a}-\frac{y\sqrt{y^2-4a^2}}{4a}$. **2065.** $x=\pi a+a(\tau-\sin\tau)$, $y=-2a+a(1-\cos\tau)$ (циклоида). **2066.** $x=2a(t\cos t-\sin t)$, $y=2a(t\sin t+\cos t)$. **2067.** $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. **2068.** Кардиоида. **2069.** Гипоциклоида $x=3a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=3a(2\sin t+\sin 2t)$. **2070.** Цепная линия $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. **2071.** $x=a(\arccos u-u^{-1}\sqrt{1-u^2})$, $a\ln u=a+y$. **2072.** $x^2+y^2=a^2$. **2073.** При том же полюсе и соответствующем повороте полярной оси уравнение эволюты $r_1=e^{a\varphi_1}$. **2075.** $8a$. **2076.** $\frac{3}{2}a$. **2077.** $8a$.

2078. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **2079.** $p(3\sqrt{3}-1)$. **2080.** $\sqrt{1-a^{-2}}\,e^{a\varphi_1}(e^{2\pi a}-1)$. **2081.** $y=\pm 1$. **2082.** $y=\pm x$. **2083.** Контур квадрата $|x|+|y|=1$.

2084. $\pm x\pm y=1$. **2085.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **2086.** Гипербола, для которой стороны угла асимптоты. **2087.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$. **2088.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$.

2089. $x\sin\alpha=2\sqrt{hy}-(y+h)\cos\alpha$. **2090.** $x^2+(y-b)^2=\frac{1}{2}a^2$.

2091. Циклоида. **2092.** Циклоида. **2093.** $x^2+2y^2=2a^2$. **2094.** $x^3+xy^2+py^2=0$. Если $y^2=2px$ — уравнение параболы. **2095.** Если $y^2=2px+p^2$ — уравнение параболы, то огибающей будет: 1) прямая $x+p=0$ и 2) окружность $2x^2+2y^2=px+p^2$. **2096.** $4a^2x^2+4b^2y^2=$

$= (x^2+y^2)^2$, если $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ — уравнение данного эллипса. **2097.** 1) $y=0$, 2) $x=a\dfrac{\sigma^5+3\sigma}{\sigma^4+1}$, $y=a\dfrac{2\sigma^3}{\sigma^4+1}$, $\sigma=\pm 1$. **2099.** $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$.

2100. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}}+\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}}=1$. **2101.** Кардиоида. **2102.** Эпициклоида, у которой радиус катящегося круга равен половине радиуса неподвижного круга. **2103.** $x=\dfrac{p}{2(1-2\lambda)}\,\dfrac{t^6+6(1-\lambda)t^4+6\lambda t^2+4\lambda^2}{3t^2-2\lambda}$, $y=4p\dfrac{t^3}{3t^2-2\lambda}$; $\lambda=\dfrac{a}{p}$. **2104.** $(\sigma, -2\sigma)$, $(2\sigma, -\sigma)$; $\sigma=\pm 1$. **2105.** $(0; \pm 1)$; $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, $(\pm 1, 0)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2106. $\left(\dfrac{\sigma\sqrt[4]{3}}{4}, \dfrac{\sigma\sqrt[4]{27}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\sigma\sqrt[4]{27}}{4}, \dfrac{\sigma\sqrt[4]{3}}{4}\right)$; $\sigma=\pm 1$. **2107.** Вершины с касательными, параллельными оси Ox, в точках $(\pm a; \pm a)$; с касательными, параллельными оси Oy, в точках $((\pm 1\pm\sqrt{2})a, 0)$. **2108.** $(2n+1)\pi x=2$. **2109.** $\pm x\sqrt{2}=\sqrt{(2n+1)\pi}$. **2110.** $\dfrac{\pi}{6}$. **2111.** $x=\pm 1$. **2112.** $(0, a)$, $(a, 0)$. **2113.** $(1, 0)$. **2114.** $x\sqrt{3}=\pm a$. **2115.** $x=0$. **2116.** $x=2$ и $x=6$. **2117.** $2x=-1$. **2118.** $x=e^{-\frac{3}{2}}$. **2119.** $x=n\pi$. **2120.** $8x=(2n+1)\pi$. **2121.** $6\varphi=\pm\pi$. **2122.** Точки перегиба находятся из уравнения $2\operatorname{tg}^3\varphi+3\operatorname{tg}^2\varphi+3=0$. **2123.** $(0, 0)$ — точка возврата. **2124.** $(0, 0)$ — двойная точка при $a>0$, изолированная точка при $a<0$, точка возврата при $a=0$ и $b\neq 0$. **2125.** То же. **2126.** $(0, 0)$ — двойная точка. **2127.** $(0, 0)$ — изолированная точка. **2128.** $(0, 0)$ — тройная точка с совпадающей касательной $y=0$. **2129.** То же, но с касательными $x=0$, $y=x$. **2130.** $(0, 0)$ — изолированная точка. **2131.** $4a^3+27b^2=0$. **2133.** $(0, 1)$ — точка прекращения. **2134.** $(0, 0)$ — то же. **2135.** $(0, 0)$ — то же. **2136.** В начале координат разрыв. **2137.** Разрыв в начале координат. **2138.** Угловая точка в начале координат. **2139.** Конечный разрыв при $x=0$. **2140.** Угловая точка при $x=0$. **2141.** В окрестности точки $x=0$ бесконечное множество вершин. **2142.** То же. **2143.** То же. **2144.** (e, e) — двойная точка. **2145.** $x=1$, $y=1$. **2146.** $y=0$, $x=3$. **2147.** $x=-1$, $y=\pm 1$. **2148.** $y=x$, $x=0$. **2149.** $x=0$, $x=1$, $x=2$, $y=0$. **2150.** $y=\pm(x+a)$, $x=a$. **2151.** $2y=\pm(2x-b)$, $x=-b$. **2152.** $3y=3x+2$. **2153.** $x+y=0$. **2154.** $x+y+a=0$. **2155.** $x+y=0$. **2156.** $r\sin\varphi=a$. **2157.** Максимум $|y|$ при $2x=3$. Острие в $(0,0)$. При $2x=3-\sqrt{3}$ точка перегиба. В точке $(2, 0)$ касательная параллельна оси Oy. См. чертеж. **2158.** Псевдоквадрат с четырьмя осями симметрии. $OA=a$, $BC=a\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\right)$. См. чертеж.

2159. Еще большее приближение к квадрату. $BC=a\sqrt{2}\left(1-2^{-\frac{1}{2n}}\right)\approx\dfrac{a}{2n}$.

2160. Похожа на гиперболу. Асимптота $2y=\pm x$. Область существования

$x^2>6$. См. чертеж. **2161.** Область существования $|x|<5$. В начале координат двойная точка с касательными $5y=\pm 4x$. Максимум y при $x=\pm\sqrt{20}$. Минимум при $x=\pm\sqrt{5}$. См. чертеж. **2162.** Область существования $|x|<1$. В начале двойная точка с касательной $y=0$. Максимум $|y|$ при $3x=2$. Точка перегиба при $x\sqrt{12}=\pm\sqrt{9-\sqrt{33}}$. См. чертеж. **2163.** В начале точка с двойной касательной $y=0$. Вершины в точках $(\pm 6, 12)$, $(\pm 6\sqrt{2}, 8)$. См. чертеж. **2164.** В начале точка самоприкосновения. Максимум $|y|$ при $x=\dfrac{9\pm\sqrt{209}}{8}$. Область существования: $-1<x<4$. См. чертеж. **2165.** В начале точка самоприкосновения. При $|x|<\sqrt{3}$ имеем $y=\pm\sqrt{x+\sqrt{4x^2-x^4}}$. При $\sqrt{3}<x<2$ имеем $y=\pm\sqrt{x\pm\sqrt{4x^2-x^4}}$. Касательные, параллельные оси Ox, при $x=\pm\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{33}}{8}}$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm\sqrt{3}, 0)$ и $(2, \pm\sqrt{2})$. См. чертеж. **2166.** При $0<y<6$ имеем $x=\pm\sqrt{-4y+\sqrt{16y^2+6y^3-y^4}}$. При $-2<y<0$ имеем $x=\pm\sqrt{-4y\pm\sqrt{16y^2+6y^3-y^4}}$. Касательная, параллельная оси Ox, в точках $(0, 6)$, $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$. В начале — тройная точка с касательными $y=0$, $y\sqrt{3}=\pm 2x$. См. чертеж. **2167.** Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(0, \pm\sqrt{2})$, $(0, \pm 2\sqrt{2})$, $(\pm 2, \pm\sqrt{10})$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm 3, \pm\sqrt{5})$; точки $(\pm 2, 0)$ — двойные. См. чертеж. **2168.** В начале — двойная точка; оси координат касательные. Касательные, параллельные осям $x_1=\sqrt[8]{\dfrac{3}{16}}$, $y_1=\sqrt{\dfrac{27}{16}}$ и т. д. См. чертеж. **2169.** В начале — двойная точка с касательными $y=\pm x\sqrt{35}$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\dfrac{21}{8}, \pm\dfrac{7}{8}\sqrt{7}\right)$, $\left(\dfrac{10}{3}, \pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(5, 0)$ $(7, 0)$, $\left(-\dfrac{1}{24}, \pm\dfrac{\sqrt{143}}{24}\right)$. См. чертеж. **2170.** Кардиоида — частный случай улитки Паскаля. В начале — точка возврата с касательной $y=0$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(3, \pm\sqrt{27})$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(8, 0)$, $(-1, \pm\sqrt{3})$. См. чертеж. **2171.** Начало координат — тройная точка; оси координат — касательные в нем. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\sqrt{12}, \pm\sqrt{6\sqrt{12}}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(4, \pm 4)$. См. чертеж. **2172.** Бисквит. Начало — изолированная точка. Касательная, параллельная оси Ox, в точках $(0, \pm 1)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точках $(\pm 1, 0)$; $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. См. чертеж. **2173.** Четырехлепестник. Начало — четверная точка кривой, оси координат касательные в ней. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm 2, \pm\sqrt{2})$. Прямые $y = \pm x$ — оси симметрии. См. чертеж. **2174.** Лемниската. Начало — двойная точка; оси координат — касательные в нем. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\sigma\sqrt[4]{3}, \sigma\sqrt[4]{27}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точках $\left(\sigma\sqrt[4]{27}, \sigma\sqrt[4]{3}\right)$, где $4\sigma = \pm 1$. Прямая $y = x$ — ось симметрии. См. чертеж. **2175.** Точка (1, 0) двойная, с касательными $y = \pm(x - 1)$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке (0, 0). См. чертеж. **2176.** Двойная точка в (0, 0) с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Oy: $x + 1 = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $x = -\frac{24}{25}$. См. чертеж. **2177.** Начало — двойная точка с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точках $(-4a, \pm 4a)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $(-5a, 0)$. См. чертеж. **2178.** Начало — тройная точка с касательными $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. Есть параболические ветви. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\sqrt{\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\sigma}, \sqrt{\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\sigma}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\sigma, \frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{9}\sigma\right)$, $\sigma = \pm 1$. См. чертеж. **2179.** Начало координат — тройная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. Имеется касательная, параллельная оси Ox, и касательная, параллельная оси Oy (не считая касательных в начале координат). См. чертеж. **2180.** Начало координат — тройная точка с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $(1, -1)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}, -\frac{8}{9}\right)$. Криволинейная асимптота $y = x^2 + \frac{2}{3}x$. См. чертеж. **2181.** Начало — тройная точка с касательными $y = 0$, $y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(\pm 2, 2)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{16}{9}\right)$. Две параболические ветви, на которых $x^{\frac{4}{3}} : y \to -\sqrt[3]{2}$, при удалении в бесконечность. См. чертеж. **2182.** Асимптота $y = x$. В начале координат перегиб с касательной $y = 2x$. Вершин нет. См. чертеж. **2183.** Асимптоты $y = \pm x$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках (0, 0), $(\sqrt[3]{2}, 0)$. См. чертеж. **2184.** Асимптоты $x = 0$ и $y = x$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках (0, 0), $(-\sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2})$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $(\sigma, -\sigma)$, $\sigma\sqrt[3]{4} = 1$. См. чертеж. **2185.** Асимптоты $x = 0$, $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $\left(\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, -\sqrt[5]{\frac{9}{8}}\right)$. В начале касательная $y = x$. Параллельная ей касательная в точке $\left(-\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}\right)$. **2186.** Асимптоты $x=0$, $y=0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке (1, 1). В начале касательная $x-2y=0$. См. чертеж. **2187.** Асимптота $x+y=0$. В начале точка перегиба с касательной $x=0$ Две вершины с касательными, параллельными оси Ox, в точках. $4+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}\,x=\pm 1$, $y=\pm(\sqrt{5}+1)x$. См. чертеж. **2188.** Асимптоты $y=\pm x$. Касательные, параллельные осям, в точках $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$ и $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$. См. чертеж. **2189.** Асимптоты $y=\pm x\sqrt{3}$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках (0, 0), $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, 0\right)$. См. чертеж. **2190.** Асимптоты $x=0$, $y=0$, $y=x$. В (0, 0) перегиб с касательной $y=-x$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(\sigma, (\sqrt{2}+1)\sigma)$, $(-\sigma, \sigma(\sqrt{2}-1))$; $\sigma=\pm 1$. См. чертеж. **2191.** Асимптоты $x=0$, $y=0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке (0, 1). См. чертеж. **2192.** Асимптоты: $x=0$, $y=0$, $y=\pm x$. Оси симметрии $y\pm(1\pm\sqrt{2})x=0$. См. чертеж. **2193.** Асимптоты: $x=0$, $y=0$, $y=x$. Уравнение кривой в полярных координатах $r^4\sin 2\varphi\,(1-\sin 2\varphi)=24$, величина r минимальная при $\varphi=\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$. См. чертеж. **2194.** Асимптота $x+a=0$. В начале — двойная точка с касательными $y=\pm x$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $(a, 0)$; касательные, параллельные оси Ox, в точках $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \pm\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}\,a\right)$. См. чертеж. **2195.** Асимптоты $x-y\pm 1=0$. В (0, 0) — двойная точка с касательными $x=0$, $y=0$. См. чертеж. **2196.** Асимптоты $y=\pm 2$. Начало — двойная точка с касательной $x=0$. См. чертеж. **2197.** Асимптоты $y=\pm x$. В начале — двойная точка с касательными $x=0$, $y=0$. Пять точек перегиба. См. чертеж. **2198.** Асимптоты $x=\pm 2$. Начало — двойная точка с касательной $y=x$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(\pm 2\sqrt{t(1-t)})$, $(\pm 2t\sqrt{t(1-t)})$, где t — корень уравнения $t^3+2t-1=0$ $(t\approx 0{,}45)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$. См. чертеж. **2199.** Асимптоты $y=\pm x$. Пять точек перегиба. В начале — двойная точка с касательными $2y\pm x=0$. Вершин нет. См. чертеж. **2200.** Асимптота $y=0$. Особая точка (0, —1) — двойная с касательными $3y+3\pm x\sqrt{3}=0$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(0, \pm 2)$ (конхоида Никомеда). См. чертеж. **2201.** Асимптоты $x=\pm 1$, $y=\pm x$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm 2, 0)$. Начало — двойная точка с касательными $y=\pm 2x$. См. чертеж. **2202.** Асимптоты $y=2$, $x=\pm 1$. Начало — двойная точка с касательными $y=(1\pm\sqrt{5})x$.

Касательная, параллельная оси Oy, в точке $\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{3}\right)$. См. чертеж. **2203.** Асимптоты $y = \pm x$. Начало — двойная точка с касательными $2y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(0, \pm\sqrt{2})$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $(\pm 1, 0)$. См. чертеж. **2204.** Асимптоты $y = \pm 1$, $x = -1$, $x = -2$. Начало — двойная точка с касательными $y\sqrt{2} = \pm x$. См. чертеж. **2205.** Асимптоты $x = 2$, $y = -1$, $x + y + 1 = 0$. Начало — двойная точка с касательными $2y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(4, -4 \pm 2\sqrt{2})$. См. чертеж. **2206.** Асимптота $x = 2a$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$ (циссоида Диоклеса). См. чертеж. **2207.** Асимптота $x + y = 1$. Начало — точка возврата с касательной $x = 0$. $(3, 0)$ — точка перегиба с касательной, параллельной оси Oy. В точке $(2, \sqrt[3]{4})$ касательная параллельна оси Ox. См. чертеж. **2208.** Начало координат — точка возврата с касательной $x = 0$. Асимптоты $x = 1$, $y = x + \frac{1}{3}$. Одна касательная параллельна оси Ox. См. чертеж. **2209.** Скифоида. Асимптоты $y + 1 = \pm x$. Начало — тройная точка с касательными $x = 0$ и $y = 0$. См. чертеж. **2210.** Асимптота $4x - 8y - 1 = 0$. Криволинейная асимптота $8y = -16x^2 - 4x + 1$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{32}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy, в точке $(-1, -1)$. См. чертеж. **2211.** Асимптоты $8y = 1 \pm 4x\sqrt{2}$. Криволинейная асимптота $y = 2x^2 - \frac{1}{4}$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $(0, 0)$ и $(\pm 1, 1)$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $\left(\pm\sqrt{\frac{27}{32}}, \frac{9}{8}\right)$. См. чертеж. **2212.** Асимптоты $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. См. чертеж. **2213.** Асимптота $x + y = 0$. Начало — тройная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. Касательные, параллельные оси Ox, в точках $\pm\left(\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{5}}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy в точках $\pm\left(\frac{\sqrt[10]{108}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[10]{48}}{\sqrt{5}}\right)$. См. чертеж. **2214.** Асимптота $x = 1$. Криволинейная асимптота $y = (x + 1)(\pm\sqrt{x} + 1)$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox, в точке $\left(\frac{16}{9}, \frac{256}{27}\right)$. **2215.** Асимптота $x = 1$. Точка возврата $(2, 0)$. См. чертеж. **2216.** Асимптоты $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$. Касательные, параллельные оси Oy, в точках $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}; \frac{\mp\sqrt{2}}{2}\right)$. См. чертеж. **2217.** Асимптоты $2y = \pm 1$. Касательные, параллельные оси Ox, при

$t\sqrt[4]{3}=\pm 1$. Касательные, параллельные оси Oy, при $t=0$ и $t=\infty$. См. чертеж. **2218.** Асимптоты $x+y\pm 2=0$ и $x=0$. Касательные, параллельные оси Ox, при $2t=\pm\sqrt{5+\sqrt{17}}$. См. чертеж. **2219.** Асимптоты $x=1$, $3x=4$, $y=2$, $3y=2$. Касательные, параллельные оси Ox, при $t=-2\pm\sqrt{5}$, и параллельная оси Oy, при $t=0$. См. чертеж. **2220.** Асимптота $x=1$. Двойная точка в начале. Касательная, параллельная оси Oy, при $t=0$. Две вершины с касательными, параллельными оси Ox. **2221.** Асимптота $x+1=0$. Двойные точки при $t=0$ и $t=1$. Касательные, параллельные оси Oy, при $t=-1\pm\sqrt{2}$. Касательная, параллельная оси Ox, при t, равном корню уравнения $t^3+3t-2=0$, т. е. при $t=0{,}596\ldots$ **2222.** Асимптоты: $4y=2x-3$, $2x+1=0$, $y=0$. Касательные, параллельные оси Oy, при $t=0$ и $t=2$. При $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ двойная точка. **2223.** Асимптоты: $2x=9$, $2y=-9$, $x-y=6$. При $t=-2$ касательная, параллельная оси Ox; при $t=2$ касательная, параллельная оси Oy. При $t=0$ точка возврата. **2224.** В начале двойная точка. Асимптота $y=x+1$. Две параболические ветви. **2225.** Начало — двойная точка. Асимптоты $y=0$. Две точки, где касательная параллельна оси Ox. **2226.** Асимптоты $y=\pm a$. Начало двойная точка. **2227.** Двойная точка (e, e). Асимптоты $x-1=0$ и $y-1=0$. См. чертеж. **2228.** $\begin{vmatrix} a & b & c-x \\ a_1 & b_1 & c_1-y \\ a_2 & b_2 & c_2-z \end{vmatrix}=0$. **2229.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$. **2232.** $x=a\sin^2 t$, $y=a\sin t\cos t$, $z=a\cos t$. **2234.** $x^2+y^2+x+y-1=0$, $z=0$. **2235.** В соответствующих полярных координатах $r=e^{\varphi}$. **2238.** $\frac{4x-t^4}{4t^2}=\frac{3y-t^3}{3t}=\frac{2z-t^2}{2}$. **2239.** $\frac{4x-1}{4}=\frac{3y+1}{-3}=\frac{2z-1}{2}$, $\frac{x-4}{4}=\frac{3y+8}{-6}=z-2$. **2240.** $\cos\alpha=\sin^2\frac{t}{2}$; $\cos\beta=\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$; $\cos\gamma=\cos\frac{t}{2}$. **2241.** При $t=n\pi$ касательная параллельна yOz, при $t=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ касательная параллельна xOz. **2242.** $x+3y=10$, $3y+4z=25$. **2243.** $-4x+3y+6z=47$, $-4x+4y-z=6$. **2244.** $2m(x+y)=z+2m^2$, $x=y$. **2245.** $m\cos\alpha=\sqrt{a}$, $m\cos\beta=\sqrt{b}$, $m\cos\gamma=\sqrt{2z_1}$; $m=\sqrt{a+b+2z_1}$. **2246.** $M\cos\alpha=z_1$, $M\cos\beta=mz_1$, $M\cos\gamma=-(my_1+x_1)$; $M^2=(m^2+1)z_1^2+(my_1+x_1)^2$. **2247.** $\frac{p+q}{\sqrt{2}}$. **2248.** $\cos\varphi=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+a^2t^2}}$. **2249.** $x+y+4x_0z=2x_0+8x_0^3$. **2250.** $(x\pm y)\sqrt{4a^2-p^2}\pm pz=p\sqrt{4a^2-p^2}$. **2253.** $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2264.** $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ и $x=\frac{a}{\cos t}$, $z=b(t-\operatorname{tg} t)$. **2265.** Окружность $rx=-a\sin t$, $ry=a\cos t$, $rz=b$; $r=\sqrt{a^2+b^2}$. **2266.** $x=\sin^2 t$, $y=-\sin t\cos t$, $z=\cos t$ (кривая Вивиани) (см. задачу № 2232). **2268.** $6x-8y-$

$-z+3=0$. **2269.** $z=ay+b$. **2270.** $x\sqrt{b}\pm y\sqrt{a}=0$. **2271.** $-e^{-t}x+e^{t}y+z\sqrt{2}-2t=0$. **2272.** $bx\sin t-by\cos t+a(z-bt)=0$. **2273.** $(a_2b_1-a_1b_2)(x-x_0)+(ab_2-a_2b)(y-y_0)+(a_1b-ab_1)(z-z_0)=0$. **2275.** $y_0x-x_0y=0$, $z=z_0$ — главная нормаль, $x_0x+y_0y=a^2$, $a^2(x-x_0)=by_0(z-z_0)$ — бинормаль. **2276.** Бинормаль: $x=6t+1$, $y=-8t+1$, $z=-t+1$; главная нормаль: $x=-31t+1$, $y=-26t+1$, $z=22t+1$. **2277.** Вектор бинормали $\mathbf{B}[1, -2t, t^2]$, вектор главной нормали $\mathbf{N}[2t+t^3, 1-t^4, -t-2t^3]$. **2278.** $x=2t+\frac{1}{2}$, $y=-2t+\frac{2}{3}$, $z=t+\frac{1}{2}$ — бинормаль, $x=2t+\frac{1}{2}$, $y=t+\frac{2}{3}$, $z=-2t+\frac{1}{2}$ — главная нормаль. **2279.** $cx=-a\sin t$, $cy=a\cos t$, $cz=b$ — индикатриса касательной, $cx=b\sin t$, $cy=-b\cos t$, $cz=a$ — индикатриса бинормали; $c^2=a^2+b^2$. **2282.** $\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=\sin x\cos x$. **2283.** Винтовая линия $x=(a-l)\cos t$, $y=(a-l)\sin t$, $z=bt$. **2284.** $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{b}$. **2285.** Параметрическое представление точек поверхности $x=a\cos u+bv\sin u$, $y=a\sin u-bv\cos u$, $z=av+bu$. **2286.** $\rho\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}=4$. **2287.** $\rho\operatorname{sh}t=a\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t$. **2288.** $\rho\sqrt{2}=(x+y)^2$. **2289.** $\rho\sqrt{2}=3e^{t}$. **2290.** $2\rho=a\operatorname{ch}t$. **2291.** $\rho\sqrt{a+b}=\sqrt{(a+b+2z)^3}$. **2292.** $\rho=\sqrt{6}$. **2293.** $3(1+t^2)^2$. **2294.** $2a(1+\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}:\sqrt{5+\sin^2 t}$. **2295.** $\frac{25}{6}a\sin 2t$. **2296.** $(1+z^2)^{\frac{3}{2}}:\sqrt{1+z^2+z^4}$. **2297.** $(64y^6+36y^3+1):12$. **2298.** $\frac{1}{3(t^2+1)^2}$. **2299.** $-\frac{z^2+2}{z^4+z^2+1}$. **2300.** $\frac{3\sin t}{5a}$. **2301.** $a\rho=ar=(y+a)^2$. **2302.** $2abt\rho=(a^2+2b^2t^2)^2$; $r=-\rho$. **2306.** Если шаг винта равен длине окружности цилиндра. **2308.** Центр лежит на оси кривизны на расстоянии $-r\frac{d\rho}{ds}$ от центра кривизны. **2309.** $\xi^2=2\rho\eta$ — на соприкасающейся плоскости, $6\rho r\zeta=-\xi^3$ — на спрямляющей плоскости, $9r^2\zeta^2=2\rho\eta^3$ — на нормальной плоскости. **2315.** $(mx-ly)^2+(lz-nx)^2+(ny-mz)^2=a^2(l^2+m^2+n^2)$. **2316.** $(x+4y+9z)^2=14(x^2+4y^2+9z^2-1)$. **2317.** $(nx-lz)^2+(ny-mz)^2=an(ny-mz)$. **2318.** $(x+1)^2=2y^2+z^2$. **2319.** $(bz-cy)^2=2p(z-c)(az-cx)$. **2320.** $c^2(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$. **2321.** $4(x^2+y^2)=(z+2)^2$. **2322.** $4xy+(z+3c)^2=0$. **2323.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$. **2324.** $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **2325.** $y^2+z^2=2px$. **2326.** $(\sqrt{x^2+z^2}-a)^2+y^2=R^2$. **2327.** $y^4=4p^2(x^2+z^2)$. **2328.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2-z^2)$. **2329.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2+z^2)$. **2330.** Циклоида. **2331.** $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=b\sin\theta\sin\varphi$, $z=c\cos\theta$. **2332.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$.

2333. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **2334.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **2335.** $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1$. **2336.** $xx_1+yy_1=zz_1$. **2337.** $x+y+3z=9$. **2338.** $x_1^{n-1}\cdot x+y_1^{n-1}\cdot y+z_1^{n-1}\cdot z=a^n$. **2339.** $(2r^2-a^2)\,x_1x+(2r^2+a^2)\,y_1y+(2r^2-a^2)\,z_1z=r^4$, где $r^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$. **2341.** $d=\frac{2\pi z_1\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{h^2+4\pi^2\left(x_1^2+y_1^2\right)}}$.

2342. $x+y+z-3=0$. **2343.** 1) $x=x_1$, $x_1y=az$; 2) $y=y_1$, $y_1x=az$. **2344.** $x\sin v-y\cos v+\frac{u}{a}z=uv$. **2345.** $3x-3y+z=2$. **2352.** $x\cos u+y\sin u=a$, $aku=az-k\sqrt{x^2+y^2-a^2}$. **2353.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{x^2}{a^4}\operatorname{tg}^2\alpha$. **2367.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$. **2368.** $(x^2+y^2+z^2)^2=4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$. **2370.** $y^2+z^2=1$. **2371.** $y^2+z^2=(x-\sqrt{2})^2$. **2372.** $(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2=a^2(l^2+m^2+n^2)$. **2373.** $4(x^2+y^2)=4z+1$. **2374.** $x^2+[y\pm\sqrt{(p-q)\,q}]^2=2pz+pq$. **2375.** $a^2-z^2=(r\pm\sqrt{x^2+y^2})^2$. **2376.** $y^2=2(x+z)$. **2377.** $(\sigma x-l\tau)^2+(\sigma y-m\tau)^2+(\sigma z-n\tau)^2=p^2\tau^2$, где $\sigma=l^2+m^2+n^2-p^2$, $\tau=lx+my+nz$. **2378.** $|x|+|y|+|z|=1$. **2379.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$. **2380.** $xyz=c^3$. **2381.** $x^\sigma+y^\sigma+z^\sigma=c^\sigma$; $(n+1)\,\sigma=n$. **2383.** $\frac{a^2}{c}$ и $\frac{b^2}{c}$. **2384.** p и q. **2385.** $mR_1=-mR_2=u^2+m^2$. **2386.** $aR_1=(z+\sqrt{m^2+z^2})\,m$, $aR_2=(z-\sqrt{m^2+z^2})\,m$, $m^2=x^2+y^2+a^2$. **2387.** $R_1=-R_2=\frac{1-\sin^2x\sin^2y}{\cos x\cos y}$.

2388. $R_1=-R_2=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y$. **2389.** $R_1=-R_2=a\operatorname{ch}^2\frac{z}{a}$. **2391.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми $y=0$; $cx\sqrt{b^2-c^2}\pm az\sqrt{a^2-b^2}=0$, если $a>b>c$. **2392.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми: $\begin{cases} z-1=0\\ x+2y-2=0,\end{cases}$ $\begin{cases} z-1=0\\ 3x+4y-1=0.\end{cases}$ **2393.** $\frac{1}{R_1R_2}=pq\left(1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)^2$. **2396.** $\frac{1}{R_1R_2}=\frac{f'\cdot f''}{\rho(1+f'^2)^2}$; $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{f''}{2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{f'}{2\rho\sqrt{1+f'^2}}$. **2398.** $x^2+y^2+z^2=px$. **2407.** $(1+f'^2)\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=r^2\left(\frac{r^2}{c^2}-1\right)$, где c — постоянная.

2408. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **2409.** $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **2410.** $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\right.$

$+ i \sin \frac{11\pi}{6}\Big)$. **2411.** $2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\pi-\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi-\alpha}{2}\right)$. **2412.** $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \times$ $\times \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$. **2413.** $\frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

2414. $a^2 - ab + b^2$. **2415.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **2416.** $(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)$.

2417. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **2418.** $\pm(2+i)$. **2419.** $\pm(3+4i)$. **2420.** $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -3 + i$. **2421.** $x_1 = 2i$, $x_2 = -1$. **2422.** $-i$, $\frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$.

2423. $\sqrt[6]{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = 45°, 165°, 285°$. **2424.** $2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$. **2425.** $2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$. **2426.** $x_k = \operatorname{tg} \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2427. $x_k = \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2n}\pi$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$. **2428.** $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$.

2429. $3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$. **2430.** $\cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$.

2431. $5 \sin \varphi \cos^4 \varphi - 10 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^5 \varphi$. **2432.** $\frac{1}{4}(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi)$.

2433. $\frac{1}{4}(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi)$. **2434.** $\frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$. **2435.** $\frac{1}{8} \times$ $\times (3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$. **2436.** $\frac{1}{16}(10 \cos \varphi + 5 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi)$. **2437.** $\frac{1}{16} \times$ $\times (10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi)$. **2442.** $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$. **2443.** $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

2444. $\frac{(1-a)\cos \varphi - a^{n+1} \cos(2n+3)\varphi + a^{n+2} \cos(2n+1)\varphi}{1 - 2a \cos 2\varphi + a^2}$.

2445. $\frac{1 - a^2 - 2a^{n+1} \cos(n+1)\varphi + 2a^{n+2} \cos n\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$. **2446.** $1 + (2n+1)\pi i$.

2447. $\ln 2 + (2n+1)\pi i$. **2448.** $(4n+1)\frac{\pi i}{2}$. **2449.** $(8n+1)\frac{\pi i}{4}$.

2450. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2n\pi i$. **2451.** -1. **2452.** $e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$.

2453. $e^{-2n\pi + i \ln 2}$. **2454.** $e^{2n\pi + \frac{\pi}{4}}$. **2455.** $i \operatorname{th} \frac{\pi}{2}$. **2456.** $\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

2457. $\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. **2458.** $\frac{1}{2i} \ln \frac{1-x}{1+x} + n\pi$. **2459.** $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$. **2460.** $a + bi + iRe^{\frac{2k\pi i}{n}}$; $k = 1, 2 \ldots, n-1$. **2461.** $1 + \sqrt{2} e^{\frac{(3 \pm 4)7\pi i}{12}}$.

2462. $z_1 + (z_1 - z_0) e^{\pm \frac{2\pi i}{n}}$. **2463.** Вне многоугольника. **2464.** $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$.

2465. $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. **2466.** $\frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$. **2467.** Площадь, ограниченная многоугольником. **2471.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **2475.** Прямая. **2476.** Окружность. **2477.** Эллипс. **2478.** Спираль Архимеда. **2479.** Логарифмическая спираль. **2480.** Увеличивается на 4π. **2481.** Первые два возрастают на π, последний — на 2π. **2482.** Умножится на $e^{2\pi i(\alpha+\beta)}$. **2483.** u обратится в $ue^{2\pi i\alpha}+2\pi i(z-a)^{\alpha}e^{2\pi i\alpha}$. **2484.** $a=0$, $b=-2$ или $2a\sqrt{2}=\pm 1$, $b=-3$. **2487.** $1-i$, $\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13})$. **2502.** $2\prod_{k=0}^{n-1}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$.

2503. $2^{2n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-\cos^2\frac{2k+1}{4n}\pi\right)$. **2504.** $2^{2n}x\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-\cos^2\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right)$.

2505. $f(i)f(-i)=(a_n-a_{n-2}+a_{n-4}-\ldots)^2+(a_{n-1}-a_{n-3}+a_{n-5}-\ldots)^2$.
2509. Не делится. **2510.** $27a_0a_3^2-9a_1a_2a_3+2a_2^3=0$. **2511.** $rp^3=q^3$.
2512. $\lambda=-22$, $\mu=40$, $x_1=-5$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=4$. **2513.** $\alpha=3$, $q=0$, $p\neq 0$. **2514.** $A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

2515. $5\varphi(x)=4x^2+3x-2$. **2516.** $f(x)=-1+\frac{1}{8}(x-1)^4\left[1+2(x+1)+\right.$ $\left.+\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{5}{2}(x+1)^3\right]$. **2517.** $f(x)=-1+(-1)^n2^{1-n}(x-1)^n\times$ $\times\left[1+\frac{n\sigma}{2}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{\sigma^2}{4}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!\,2^{n-1}}\sigma^{n-1}\right]$, где $\sigma=x+1$.
2518. $\varphi(x)\left[A+\frac{A_1}{\varphi'(a_1)(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_n}{\varphi'(a_n)(x-a_n)}\right]$; $\varphi(x)=(x-a_1)\ldots$ $\ldots(x-a_n)$. **2524.** $-2\leqslant\lambda\leqslant 2$. **2528.** $q_1^4+p_1^5\leqslant 0$, $4q_1=q$, $5p_1=p$.
2531. Положить $x=e^t$ и применить теорему Ролля; придем к уравнению без a_n. Разделить на $e^{\lambda_{n-1}t}$ и еще раз применить теорему Ролля и т. д.
2532. Следствие предыдущей. **2534.** Положить $x=e^t$ и применить теорему Ролля. **2535.** Следствие предыдущей. **2536.** Корни уравнения a_0x^m+ $+a_1x^{m-1}+\ldots+a_nx^{m-n}=0$ вещественны при любом m. Новое уравнение получаем, дифференцируя левую часть $m-s-k$ раз. Заменяем x на $\frac{1}{x}$ и умножаем на x^{s+k}. Умножаем на x^{m-s-k} и дифференцируем $m-k$ раз. Опять заменяем x на $\frac{1}{x}$ и освобождаем от знаменателя x^{s+k}. Делим на $(m-s)!\,(m-k)!$ и умножаем на $k!$ Перейдя к пределу по $m\to\infty$, получаем нужное уравнение. Вещественность всех корней уравнения сохраняется.
2537. Следствие предыдущей. **2538.** Уравнение можно переписать в таком виде: $n\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}+\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2=0$. Разлагая на простейшие дроби, получаем: $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}$, что при вещественных x и x_k

противоречит неравенству Коши $\left(\sum a_k b_k\right)^2 < \sum a_k^2 \sum b_k^2$. **2539.** График функции $\frac{f'(x)}{f(x)}$ имеет n вертикальных асимптот, если корни $f(x)$ различны. Можно также применить теорему Ролля к функции $e^{\frac{x}{\lambda}} f(x)$. **2540.** Следует из того, что уравнение имеет корень между двумя корнями $f'(x)$, между которыми $f(x)+m \neq 0$. **2541.** Применить теорему Ролля к $x^\lambda f(x)$. **2542, 43.** Следствие 2541 и того, что корни $f(ax)$ вещественны, если корни $f(x)$ вещественны и a вещественно. **2544.** Основано на соответственном обобщении 2541. Последнее получается из рассмотрения суммы $\frac{\lambda}{x} + \sum \frac{1}{x - x_k}$. **2545.** Следствие предыдущего и того, что начало можно перенести в любую точку. **2546.** Теорема Ролля для функции $e^{-\frac{x}{a}} \Phi(x)$. **2547.** Изучить $\arg f(x)$ при движении по отрезку вещественной оси между точками $-N$ и $+N$ и по замыкающей полуокружности. **2549.** Следствие 2536 и бинома Ньютона. **2550, 51.** Теорема Ролля. **2552.** В каждом из интервалов $(a_\nu, a_{\nu+1})$ есть корень. **2553.** В одном из интервалов нет корня, но уравнение имеет степень $n-2$. **2554.** Вещественность следует из теоремы Ролля для e^{-x^2}. Чтобы показать отсутствие корней у $P_n(x)$ при $|x| > \sqrt{2n+1}$, рассмотреть $y = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ и, заметив, что $y'' + (2n+1-x^2)y = 0$, $y(\infty) = y'(\infty) = 0$, применить теорему Ролля. **2555.** При нечетном n один корень, при четном n ни одного, так как при четном n и при $y' = 0$, $y'' > 0$, $y_{\min} = \frac{x^n}{n!} > 0$. **2556.** При нечетном n один корень, при четном ни одного. **2557.** Воспользоваться равенством: $(1-x^2)\varphi'_n(x) = n\varphi_{n+1}(x)$, из которого следует, что число вещественных корней $\varphi_{n+1}(x) \geqslant$ числа корней $\varphi_n(x)$ плюс единица. **2558.** Число $x_k > 0$ не больше единицы, число $x_k < 0$ — тоже. Число мнимых корней не меньше восьми. **2559.** Следствие 2537. **2560.** Если $f(x) = 0$ — данное уравнение, то $(x^2 - 2x + 1) f(x) = 0$ имеет мнимые корни. **2561.** Умножить на $(x-1)^{n-1}$. **2562.** Умножить на $(x-a)(x-b)$.

2563. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$. **2564.** $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$.

2565. $x^3 - 1 - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$. **2566.** $\frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$.

2567. $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$. **2568.** $x^3 + 3x^2 + 6x + 10 + \frac{14}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$. **2569.** $\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$.

2570. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$. **2571.** $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2}$.

2572. $\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}$. **2573.** $2 - \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$.

2574. $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x\cos\frac{2\pi\nu m}{n} - \cos\frac{2\pi\nu(m-1)}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi\nu}{n} + 1}\right]$. **2575.** $-1+$

$+\frac{2-2x\cos\varphi}{x^2-2x\cos\varphi+1}$. **2576.** $\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1-x\cos\frac{2\nu+1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2\nu+1}{2n}\pi+1}$.

2577. $\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x+1}+2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1+x\cos\frac{2\nu}{2n+1}\pi}{x^2+2x\cos\frac{2\nu}{2n+1}\pi+1}\right]$. **2578.** $\frac{-5x+4}{x^2+2}+$ $+\frac{8x+1}{x^2+x+1}$. **2579.** $\frac{x}{x^2+x\sqrt{3}+2}+\frac{x}{x^2-x\sqrt{3}+2}$. **2580.** $\frac{1}{x+2\cos\frac{\pi}{9}}+$ $+\frac{1}{x+2\cos\frac{7\pi}{9}}+\frac{1}{x+2\cos\frac{13\pi}{9}}$. **2581.** $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{s_\nu}{x^\nu}$; $s_\nu=$ $=\sum\frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}x_k^{\nu-1}$. **2582.** $\frac{a^2-(3a^2-1)x+x^2}{(1-x)[1-(4a^2-2)x+x^2]}$. **2584.** Коэффициенты ряда должны быть связаны соотношением: $a_0u_s+a_1u_{s+1}+\ldots+$ $+a_mu_{s+m}=0$, $a_0\neq 0$. Беря последовательные числа среди коэффициентов u_0, u_1, $u_2\ldots$, можем получить не более чем 3^m различных последовательностей, так как $u_\nu=\pm 1$ или 0. Поэтому среди таких групп по m чисел u_τ найдутся одинаковые. Если числа $u_l, u_{l+1},\ldots, u_{l+m}$ совпадают с числами $u_{l+p}, u_{l+p+1},\ldots, u_{l+p+m}$, то $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_{0}^{l+p-1}u_\nu x^\nu\cdot(1+x^p+x^{2p}+\ldots)=$ $=\frac{\omega(x)}{1-x^p}$, где $\omega(x)$ полином. **2585.** Искомая сумма равна $-\frac{f'(1)}{f(1)}$, где $f(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$. **2586.** Если y — корень производной в интервале $(x_{\nu-1}, x_{\nu+1})$, то $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y-x_k}=0$. **2587.** Следует из равенства $\frac{f'(x)}{f(x)}=$ $=\frac{i}{m}$ или $\sum\frac{1}{x-x_k}=\frac{i}{m}$. **2588.** 27. **2589.** 375. **2590.** -217. **2591.** -7.

2592. -5. **2593.** 0. **2594.** ab. **2595.** $abcd+bcd+acd+abd+abc$.
2596. $-2(x^3+y^3)$. **2597.** $2abc(a+b+c)^3$. **2598.** $1+a^2+b^2+c^2$.
2599. $abcd+ab+ad+cd+1$. **2600.** $(x-y)(y-z)(z-x)$.
2601. $\prod(x_\nu-x_\mu)$; $0<\nu\leqslant n$, $0<\mu\leqslant n$, $\nu>\mu$. **2602.** $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\times$ $\times\prod(x_\nu-x_\mu)$; $\nu>\mu$, $(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n)\prod(x_\nu-x_\mu)$; $\nu>\mu$. **2603.** $\Delta_1=-\prod_{\nu>2}(x_\nu-x_2)^2$. $\prod_{\nu>\mu>2}(x_\nu-x_\mu)$; $\Delta_2=-2\prod_{\nu>3}(x_\nu-x_3)^3\times$ $\times\prod_{\nu>\mu>3}(x_\nu-x_\mu)$. **2605.** $-2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$.

2606. $4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}[\sin(a+b)+\sin(b+c)+\sin(c+a)]$.

2607. $-64\alpha\beta\gamma(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)$; $\alpha=\sin a$, $\beta=\sin b$, $\gamma=\sin c$.

2608. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\delta)$. **2610.** Полезно положить $a_1=\lambda(1+\sigma_1)$, $a_2=\lambda(1+\sigma_2), \ldots, a_n=\lambda(1+\sigma_n)$. **2611.** Помножая строки на степени α и складывая, легко установить делимость на $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n)$. **2613.** Рассмотреть систему соответствующих линейных уравнений. Если $\Delta=0$, то одно из них окажется невозможным. **2614.** Умножить все элементы, не стоящие на главной диагонали, на θ, где $|\theta|<1$, и заставить $\theta\to 0$. **2616.** $n=4m, (m=1, 2, \ldots)$. **2617.** $n=4m-2$, $(m=1, 2, \ldots)$. **2620.** $\Delta=+1$, если новые оси можно непрерывным движением совместить со старыми; $\Delta=-1$, если ориентировка новых осей отличается от ориентировки старых. **2622.** $x=1$, $y=0$, $z=1$. **2623.** $x=a$, $y=1$, $z=-1$. **2624.** $x=-t$, $y=0$, $z=0$. **2625.** $x=1$, $y=-1$, $z=-1$, $t=1$. **2626.** $x=1+2\sigma+2\tau$, $y=1+\sigma$, $z=1+\sigma-\tau$, $t=1+\tau$. **2627.** $u=-t$. **2628.** $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$. **2629.** $x_\nu=\dfrac{n(n+1)}{2(n-1)}-\nu$. **2632.** Рассмотреть соответствующую систему линейных уравнений. **2633.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=0$. **2634.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

2635. $\begin{vmatrix} x_4-x_1; & y_4-y_1; & z_4-z_1 \\ x_4-x_2; & y_4-y_2; & z_4-z_2 \\ x_4-x_3; & y_4-y_3; & z_4-z_3 \end{vmatrix}=0$. **2636.** Если ранг прямоугольной матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{Vmatrix}$ равен 3, то — в плоскости, если ранг 2, то — на прямой. **2637.** Такое же условие, как в предыдущей задаче, для ранга матрицы из коэффициентов плоскостей. **2638.** Знак у всех x_ν в одном решении одинаковый. **2639.** $a_{\mu\nu}=l_\mu m_\mu$; $\mu=1, 2, \ldots, n$; $\nu=1, 2, \ldots, m$. **2640.** Билинейная форма ранга r может быть представлена как сумма r произведений пар линейных форм. **2642.** $(ae+bi+cj+dk)\pm(a_1e+b_1i+c_1j+d_1k)=(a\pm a_1)e+(b\pm b_1)i+(c\pm c_1)j+(d\pm d_1)k$; $(ae+bi+cj+dk)\times(a_1e+b_1i+c_1j+d_1k)=aa_1-bb_1+cc_1-dd_1+(ae_1+b_1b+cd_1-c_1d)i+(ac_1+a_1c+b_1d-bd_1)j+(ad_1+a_1d+bc_1-b_1c)k$. **2643.** Диагональная матрица, т. е. матрица, у которой все элементы не на главной диагонали равны нулю. **2644.** A — ортогональная матрица. **2645.** При четном n корни мнимые, при n нечетном $x=0$. **2646.** Следует из того, что у ортогональной подстановки обратная матрица получается транспонированием. **2648.** Рассмотреть систему уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11}-s)z_1+a_{12}z_2+\ldots+a_{1n}z_n&=0,\\ a_{21}z_1+(a_{22}-s)z_2+\ldots+a_{2n}z_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}z_1+a_{n2}z_2+\ldots+(a_{nn}-s)z_n&=0, \end{aligned}$$

положив $s=u+iv$, $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$. **2649.** Корни чисто мнимые. **2652.** Воспользоваться неравенством Коши: $\left(\sum\limits_\mu\sqrt{a_{\mu\nu}a_{\nu\mu}x_\mu y_\mu}\right)^2<\sum\limits_\mu a_{\nu\mu}x_\mu\sum\limits_\mu a_{\mu\nu}y_\mu$.

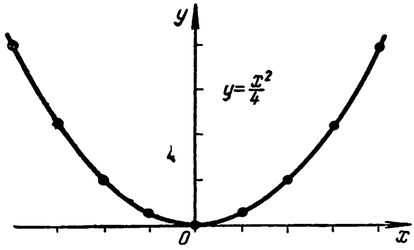
2654. $\begin{vmatrix} 1 & b_{11} & b_{12} & \dots b_{1n} \\ x & b_{21} & b_{22} & \dots b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & \dots b_{n+1,n} \end{vmatrix}$ **2655.** $E_1(\lambda)=1,\ E_2=\lambda-1,\ E_3=$ $=(\lambda-1)(\lambda-4)$. **2656.** $1, \lambda+1, (\lambda+1)(\lambda+4)$. **2657.** У первой $E_1=E_2=1$, $E_3=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, у второй $E_1=E_2=1$, $E_3=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; эквивалентны. **2659.** $E_1=E_2=E_3=1$, $E_4=\lambda(\lambda-1)$, $E_5=\lambda^2(\lambda-1)$. **2660.** 0. **2661.** $(x+y+2z)^2-(x-y)^2-4z^2$. **2662.** Два положительных и один отрицательный знак перед квадратами. **2663.** Три квадрата, взятых с плюсом, один с минусом. **2664.** $x_\mu=C_{\mu 1}y_1+C_{\mu 2}y_2+\dots+C_{\mu n}y_n$, где $C_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\mu\nu}$ в соответствующем определителе. **2670.** 38. **2671.** 59. **2672.** $a^2b-2b^2-ac+4d$. **2673.** -9. **2674.** 74. **2675.** -1. **2676.** -12. **2677.** $S_m=-(a^m+b^m)$. **2678.** $S_1=S_2=$ $=\dots=S_n=-a$. **2680.** $\dfrac{2a^2b-4ac-2b^2}{c-ab}$; $\dfrac{a^4-3a^2b+5ac+b^2}{c-ab}$. **2681.** $\dfrac{1}{4}\sqrt{-a^4+4a^2b-8ac}$. **2682.** $5x^2+x-6$. **2683.** $-4y=$ $=2x^3-3x^2+4x-7$. **2684.** $y=2x^2-x-2$. **2685.** $\dfrac{a^2-bcN}{a^3+Nb^3+N^2c^3-3Nabc}+$ $+\dfrac{(c^2N-ab)x+(b^2-ac)x^2}{a^3+Nb^3+N^2c^3-3Nabc}$. **2686.** Общий корень $x=1$. **2687.** Общих корней нет. **2688.** То же. **2689.** $\lambda=10$; $\mu=-5$. **2690.** Точки $(0, 0)$ — двойная, $(2, -1)$, $(1, 2)$, $(1{,}68;\ 2{,}52)$. **2691.** Точки $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}, \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}, \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)$. **2692.** $\begin{vmatrix} 2y-26, & 7 \\ 2y-26 & 15 \\ 2y^2-49y+111 & 15y-99 \\ 15y-99 & 21y+162 \end{vmatrix}=0$. **2693.** $m^4+9m^2+54=0$. **2694.** $28m^3+$ $+713m^2-100m=0$. **2695.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^na^{n-1}$. **2696.** $4p^3r-p^2q^2-18pqr+$ $+4q^3+27r^2$. **2697.** $M=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n$. **2698.** Рассмотреть уравнения $x^n+p_1^{(\nu)}x^{n-1}+\dots+p_n^{(\nu)}=0$, корни которых равны корням данного в степени ν. Числа p_μ^{ν} ограничены и целые. Среди уравнений должны быть одинаковые. **2699.** $4b^3+27c^2+4a^3c-a^2b^2-18abc\leqslant 0$. **2700.** Подстановка $x=y-1$; корни $x=-1\pm i\sqrt{2}, -1\pm i\sqrt{3}$. **2701.** $y^4-9y^3+75y^2-$ $-300y+2250=0$; $5x=y$. **2702.** $y^4-25y^3+375y^2-11700=0$; $30x=y$. **2704.** $y^5+2y^4+5y^3+3y^2-2y-9=0$. **2705.** $2x=-1\pm\sqrt{5}$. **2706.** Корни $m\pm\sqrt{m^2-n}$, $2m\pm\sqrt{4m^2-n}$. **2707.** $x_1=x_2=2$, $2x_3=2x_4=1$, $x_5=$ $=x_6=-1$. **2708.** $q=0$. **2710.** Левую часть можно разбить на множители:

$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n$.

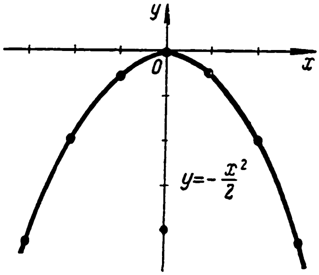
$\psi(x)=\left(x-\dfrac{1}{x_1}\right)\left(x-\dfrac{1}{x_2}\right)\dots\left(x-\dfrac{1}{x_n}\right)=x^n+\dfrac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1}+\dfrac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2}+$

$+\dots+\frac{1}{b_n}$. При этом получается равенство: $b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2+1=a_nb_n$. Если $-2<a_n<2$, то при вещественных b_ν равенство невозможно. Поэтому среди b_ν, а значит и среди x_ν, должны быть мнимые. **2711.** Рассмотреть разность $f(x)-2^nT_n\left(\frac{x}{2}\right)$, где $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$ — полином Чебышева. **2712.** Сводится к предыдущему результату. **2714.** $y^3-7y^2+11y-5=0$. **2715.** $y^3-15y^2+18y+104=0$. **2716.** $(y-1)^2(y+1)^2=0$. **2717.** $y^3+2ay^2+(a^2+b)y+ab-c=0$. **2718.** $y^3-2y^2-1=0$. **2719.** $25y^3+37y^2+18y+3=0$. **2720.** $y+p=0$. **2721.** $243y^3+288y^2-153y+145=0$. **2722.** $a^6y^3+9a^4\left(aa_2-a_1^2\right)y^2-108\left(aa_2-a_1^2\right)^3-27\left(2a_1^3-3a_1a_2a_3-a_2^2a_3\right)^2=0$. **2723.** $a, a-b, a+b$. **2724.** $a+b, a-b, a-3b$. **2725.** $a-1, a+1, a^2+1$. **2726.** $x_1=2, 2x_2=3+\sqrt{21}, 2x_3=3-\sqrt{21}$. **2727.** $4a, 6a, a-b, a+b$. **2728.** $a, 2a, a+2, 2$. **2729.** $x_1=-1$, $x_2=-2$, $4x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{23}$. **2730.** $x_1=3$, $2x_{2,3}=-3\pm i\sqrt{3}$. **2731.** $x_1=1, 2x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{27}$. **2732.** $x_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=u+v$, $x_2=u\omega+v\omega^2$, $x_3=u\omega^2+v\omega$; $\omega^3=1$. **2733.** $x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1, 2x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{15}$. **2734.** $x_1\sqrt{3}=\sqrt[3]{9\sqrt{3}+10i}+\sqrt[3]{9\sqrt{3}-10i}$ и т. д. Корни $-1, 3, -2$. **2735.** $2x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}, 2x_{3,4}=1\pm i\sqrt{11}$. **2736.** $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{3}$. **2737.** $x_1=1$, $x_2=u+v$, $x_3=u\omega+v\omega^2$, $x_4=u\omega^2+v\omega$; $2\omega=-1+i\sqrt{3}$, $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$, $v=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. **2738.** $-2\pm\sqrt{2}$, $2\pm\sqrt{7}$. **2739.** $x_1=2$; $3x_2=-2$. **2740.** $2x_1=2x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=-2$. **2741.** $x_1=-5$. **2742.** $x_1=2$. **2743.** $2x_1=-3$, $3x_2=2$. **2744.** $-2, 5, 3$. **2745.** $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-2$. **2746.** $x_1=-2$, $2x_2=1$. **2747.** $x_1=x_2=2$. **2748.** $x_1=x_2=-2$. **2749.** $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-2$. **2750.** $x_1=x_2=2$. **2751.** Левая часть делится на $(x^2+x+1)^2$. **2752.** $x_1=x_2=x_3=-2$, $x_4=x_5=2$. **2753.** $x_1=x_2=i$, $x_3=x_4=-i$. **2754.** $x_1=x_2=-1$. **2755.** Делитель $(x^2-x+1)^2$. **2756.** $x_1=x_2=x_3=i$. **2757.** Корни в интервалах $(-4, -3)$, $(0,1)$, $(3,4)$. **2758.** Корни в интервалах $(-5, -4)$, $(-1, 0)$, $(5, 6)$. **2759.** $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$. **2760.** $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$. **2761.** $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. **2762.** $(-5, -4)$, $(-3, -2)$, $(0, 1)$. **2763.** 1) $p>0$, — один вещественный корень x_1, знак которого обратен знаку q; 2) $p<0$, — один или три вещественных корня, смотря по знаку $(2n)^{2n}p^{2n+1}+(2n+1)^{2n+1}q^{2n}$. **2764.** $(-4, -3)$, $(-1, 0)$, $(3, 4)$. **2765.** $(-6, -5)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$. **2766.** $(2, 3)$, $(3, 4)$. **2767.** $(-1, 0)$, $(0, 1)$. **2768.** $(-7, -6)$, $(-1, 0)$. **2769.** $(0, 1)$, $(3, 4)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $(-4, -3)$. **2770.** $(1, 2)$. **2771.** $(1, 2)$. **2772.** $(-5, -4)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$. **2773.** $(-1, 0)$, $(5, 6)$. **2774.** $(-2, -1{,}5)$, $(-1{,}5, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, **2775.** $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(15, 16)$. **2776.** $(-2, -1)$; $(0,\ 0{,}5)$, $(0{,}5,\ 1)$.

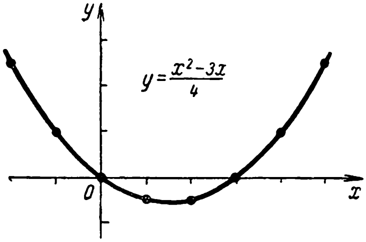
2777. $(-2, -1)$. **2778.** a) x^2+px+q, $2x+p$, p^2-4q, b) x^3+px+q, $3x^2+p$, $-2px-3q$, $-(4p^3+27q^2)$. **2779, 80.** Корни вещественны при $p^5 \geqslant q^2$. При $p^5 < q^2$ уравнение имеет лишь один вещественный корень. **2782.** Корни в интервалах $(-a^2, -b^2)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-c^2, \infty)$. **2783.** Если a вне интервала $(-n, 0)$, уравнение имеет один вещественный корень при n нечетном и ни одного при n четном. Если n в интервале $(-n, 0)$ и k — целая часть $-a$, то при четном n два вещественных корня, а при n нечетном — один, если и k нечетное, и три — если k четное. **2784.** $x_1 = -2{,}33006$, $x_2 = 0{,}20164$. **2785.** 0,83399, 5,94883. **2786.** —3,94883, —0,21718, 1,16602. **2787.** —4,14510, 0,66908. **2788.** —0,88677. **2789.** 0,38687, 1,24025. **2790.** —0,19994. **2791.** —0,435, 0,381. **2792.** 1,088. **2793.** 0,091. **2794.** 0,567. **2795.** 0,776; 2,223. **2796.** 652,7 *мм*.



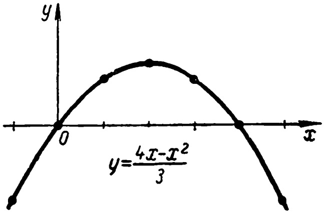
К задаче 885.



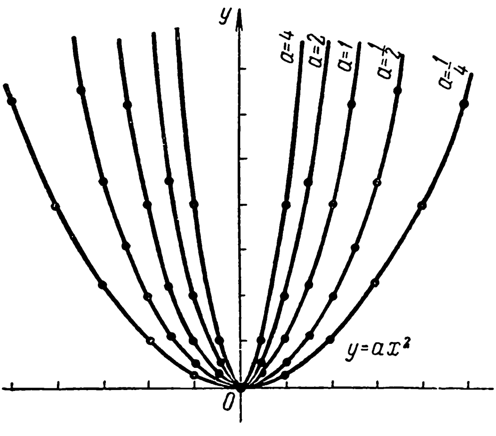
К задаче 886.



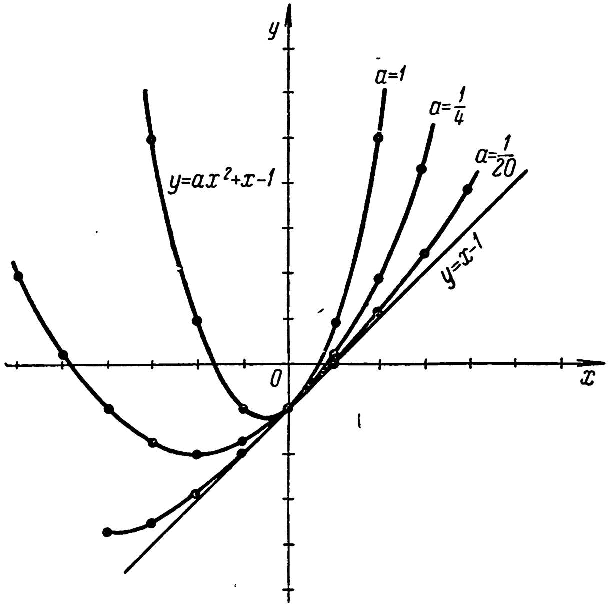
К задаче 887.



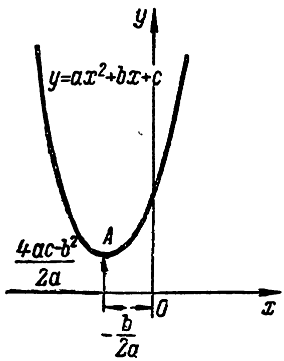
К задаче 888.



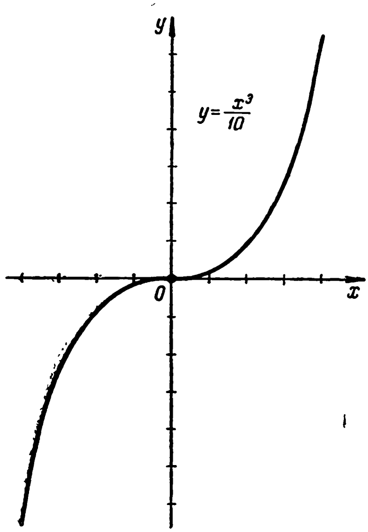
К задаче 889.



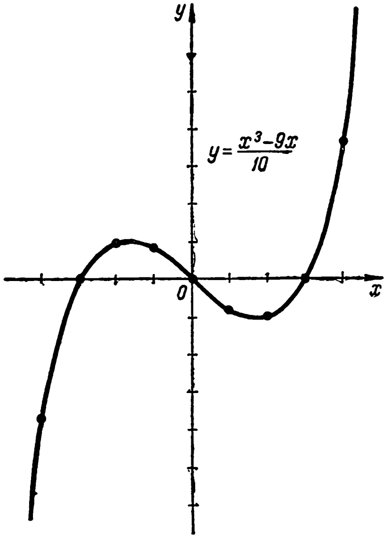
К задаче 890.



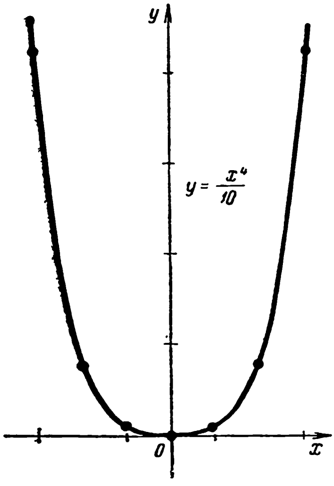
К задаче 891.



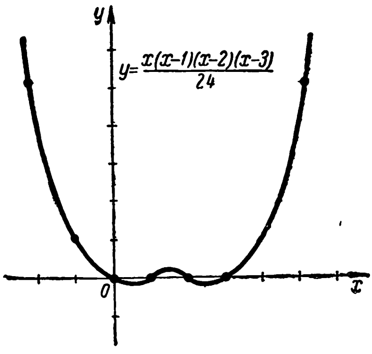
К задаче 892.



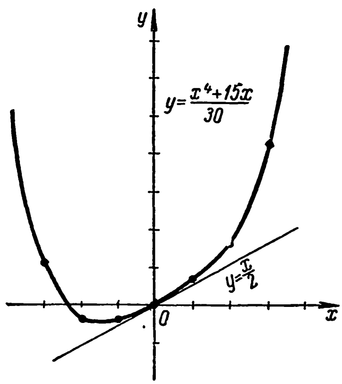
К задаче 893.



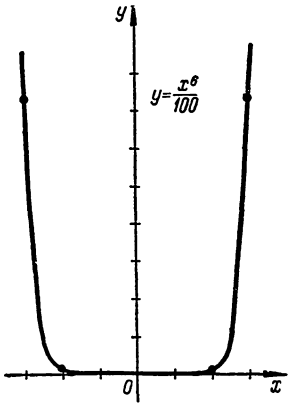
К задаче 894.



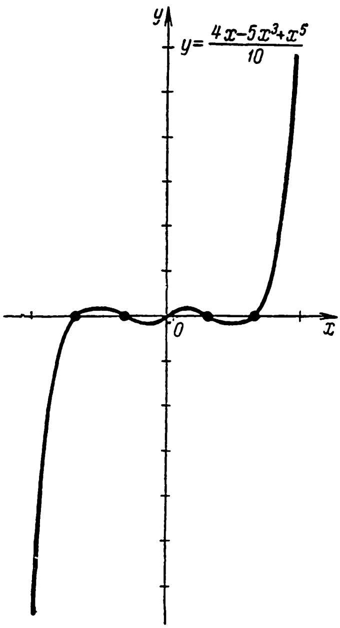
К задаче 895.



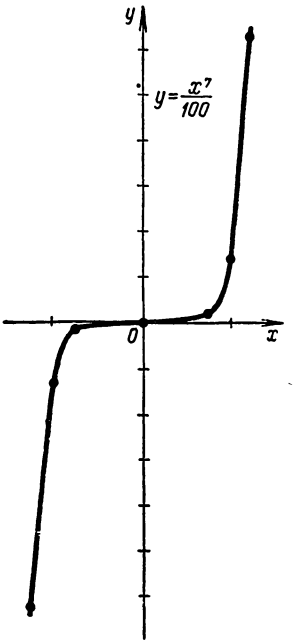
К задаче **896.**



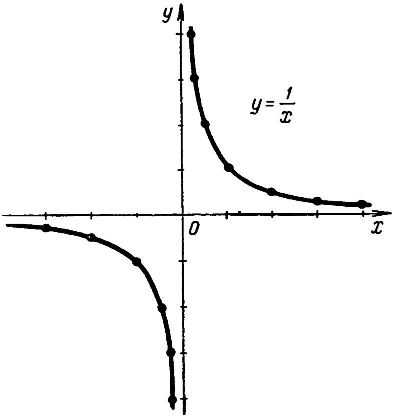
К задаче **898.**



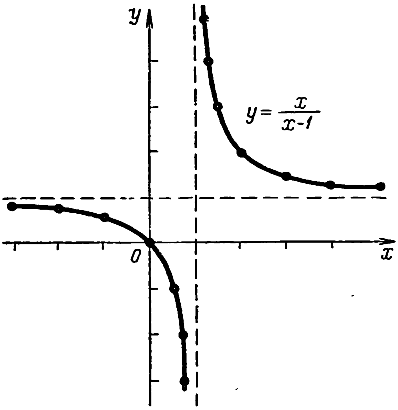
К задаче **897.**



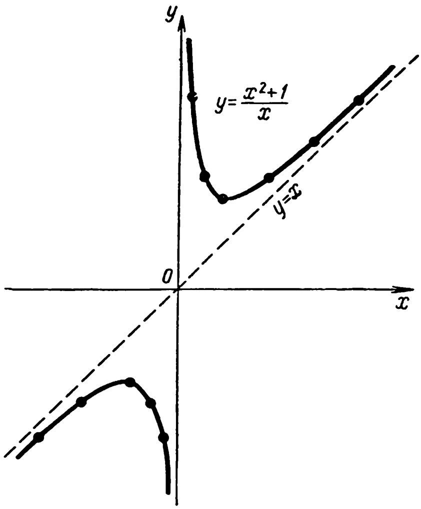
К задаче **899.**



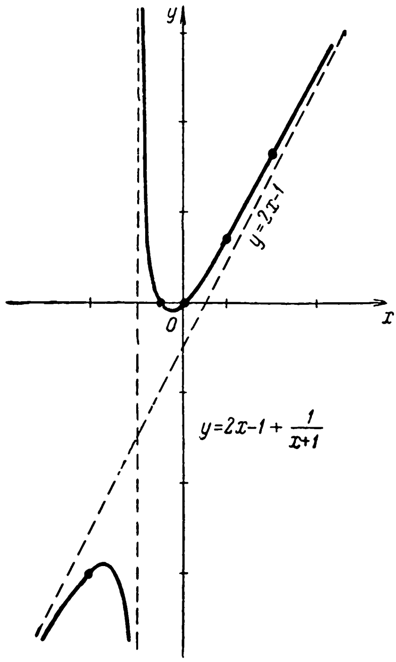
К задаче 900.



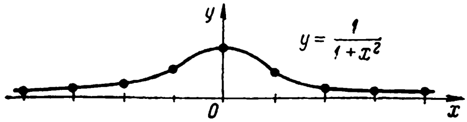
К задаче 901.



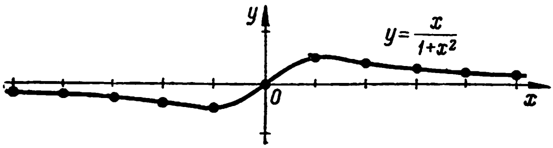
К задаче 902.



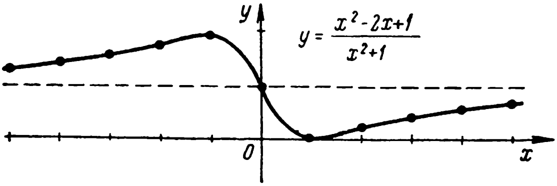
К задаче 903.



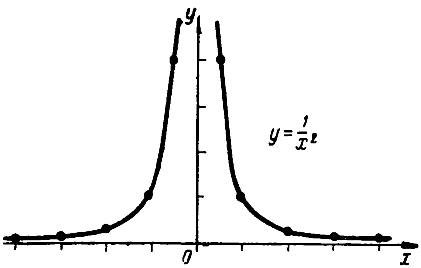
К задаче **904.**



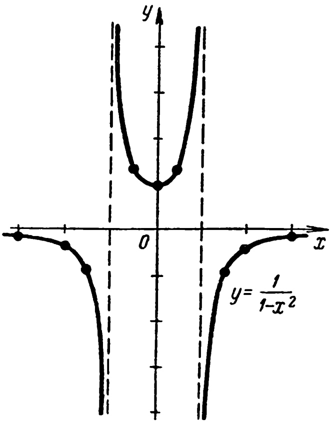
К задаче **905.**



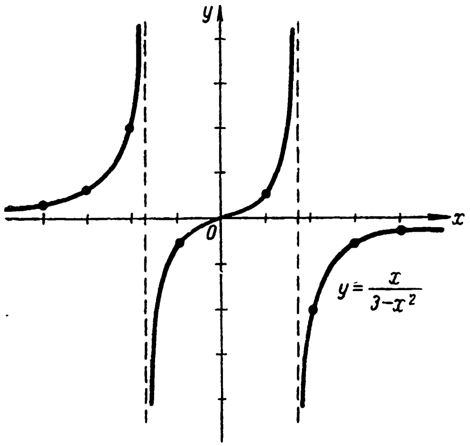
К задаче **906.**



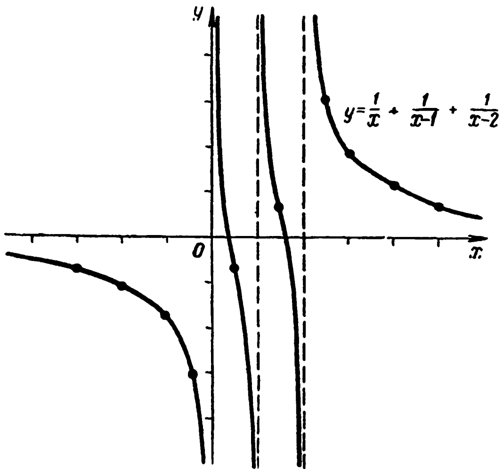
К задаче **907.**



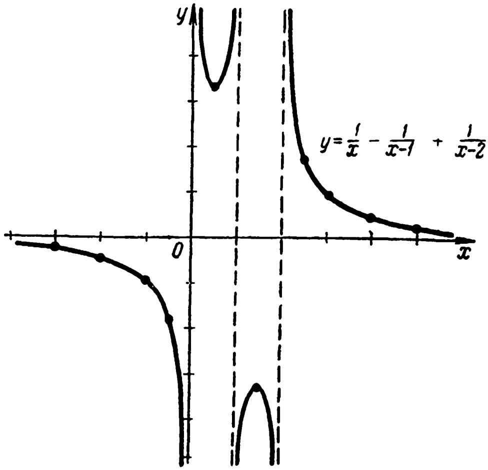
К задаче **908.**



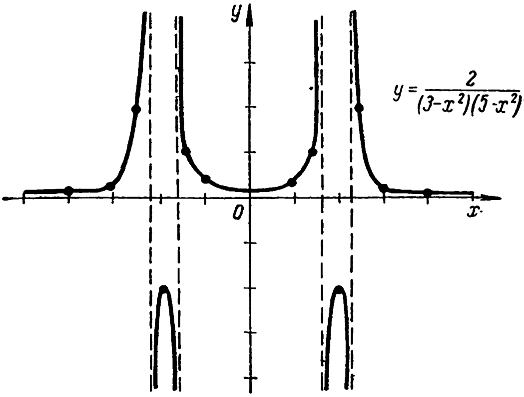
К задаче **909**.



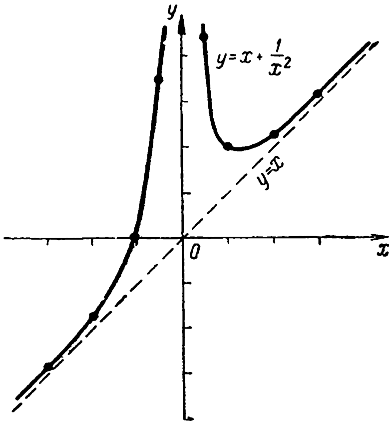
К задаче **910**.



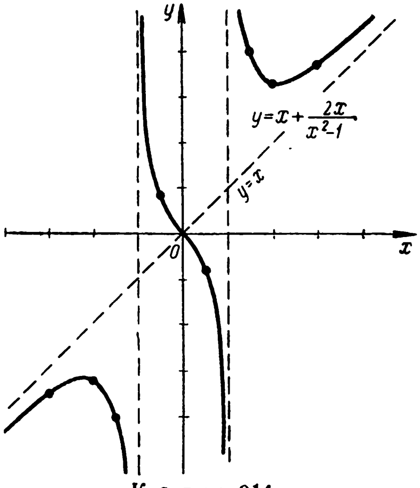
К задаче **911**.



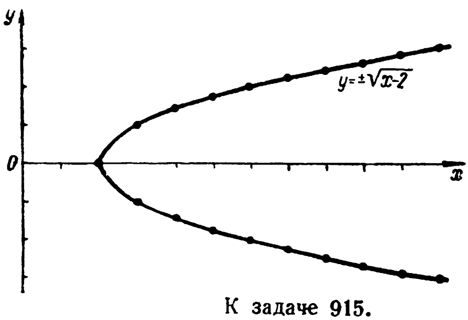
К задаче 912.



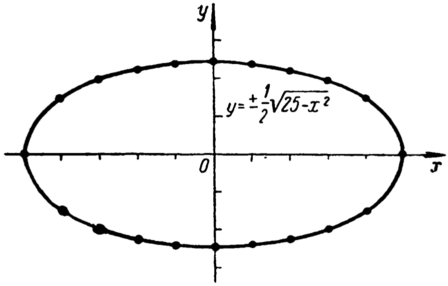
К задаче 913.



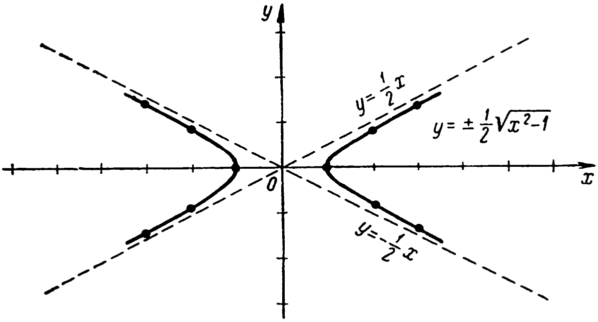
К задаче 914.



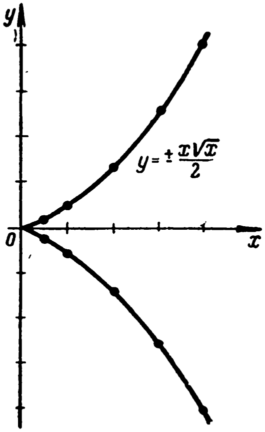
К задаче 915.



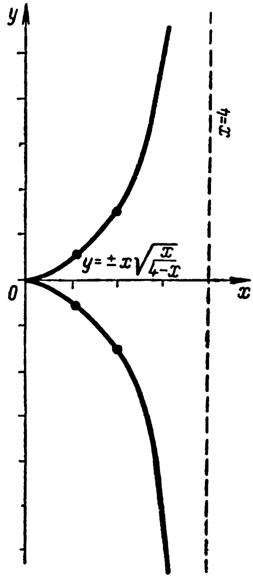
К задаче 916.



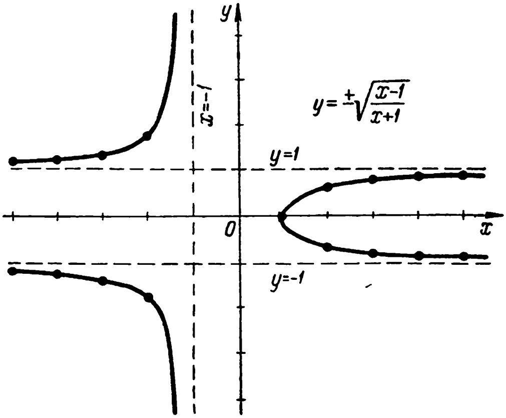
К задаче 917.



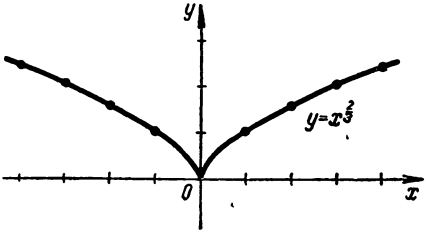
К задаче 918.



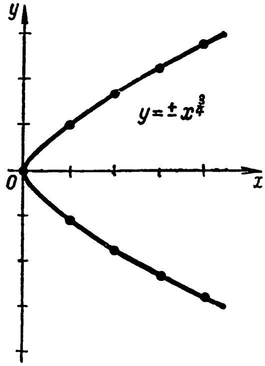
К задаче 919.



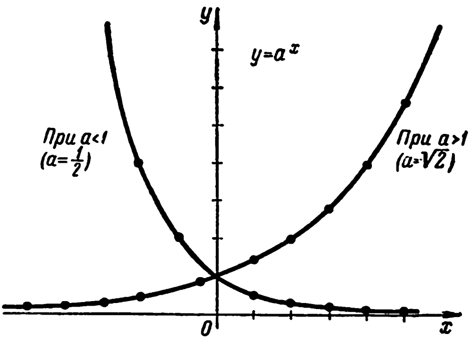
К задаче 920.



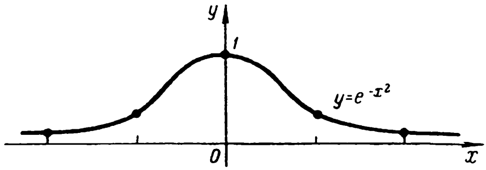
К задаче 921.



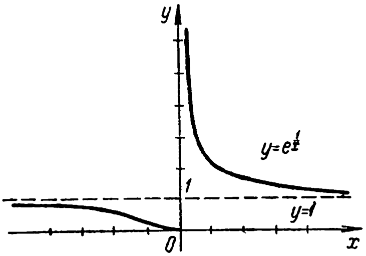
К задаче 922.



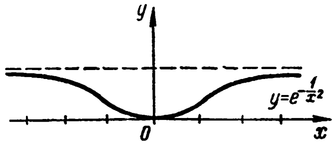
К задаче 923.



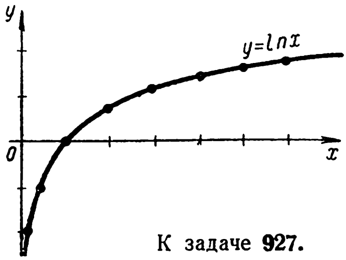
К задаче **924.**



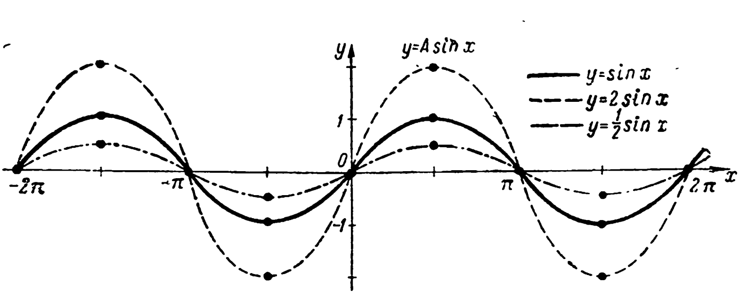
К задаче **925.**



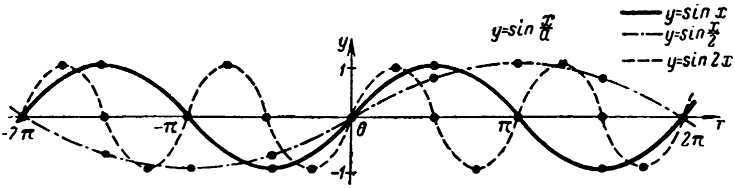
К задаче **926.**



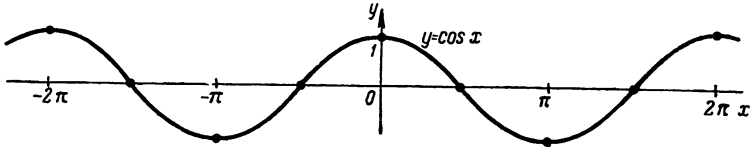
К задаче **927.**



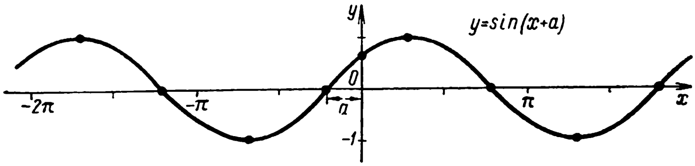
К задаче **928.**



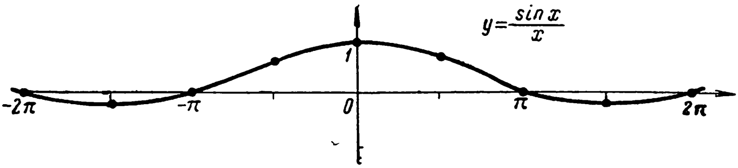
К задаче 929.



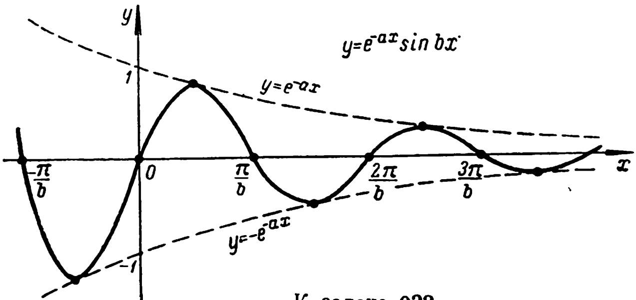
К задаче 930.



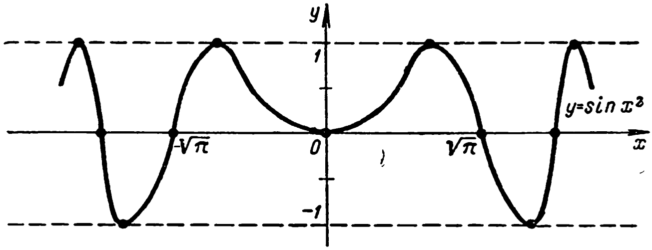
К задаче 931.



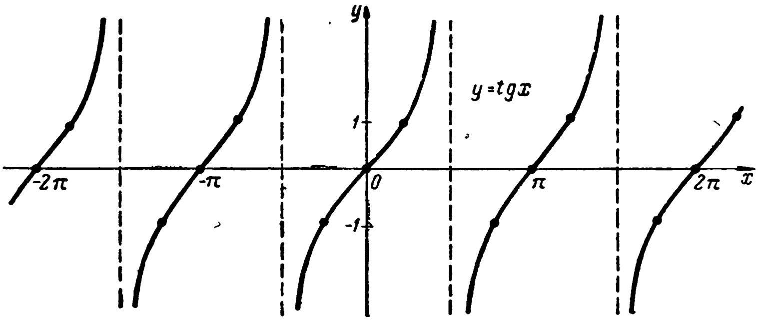
К задаче 932.



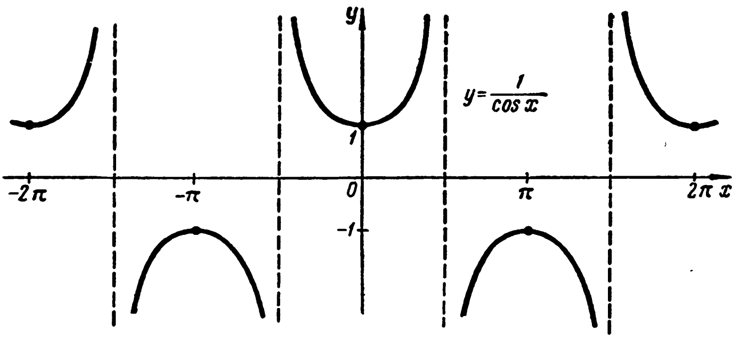
К задаче 933.



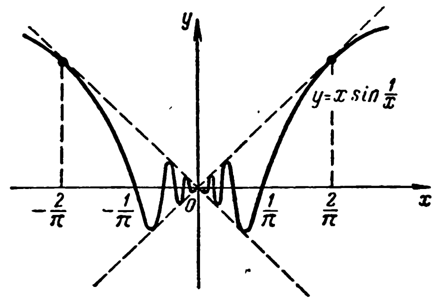
К задаче **934.**



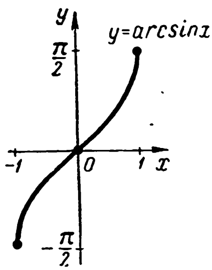
К задаче **935.**



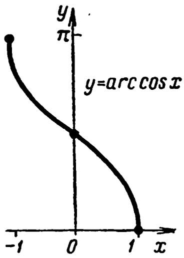
К задаче **936.**



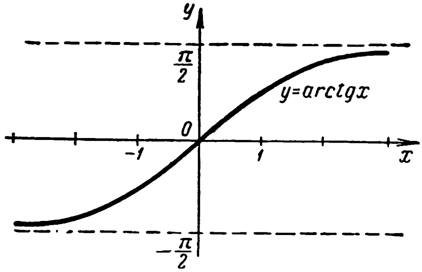
К задаче **937.**



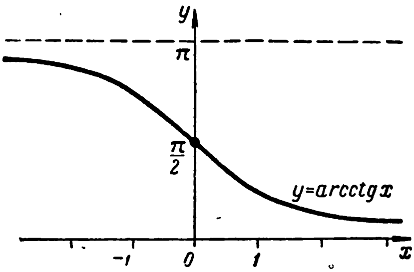
К задаче **938.**



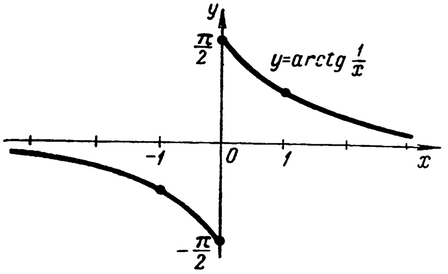
К задаче **939.**



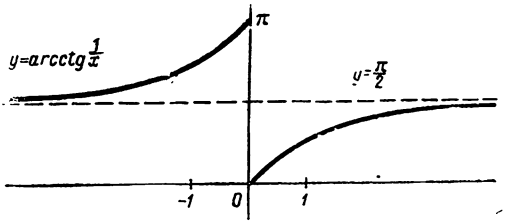
К задаче **940.**



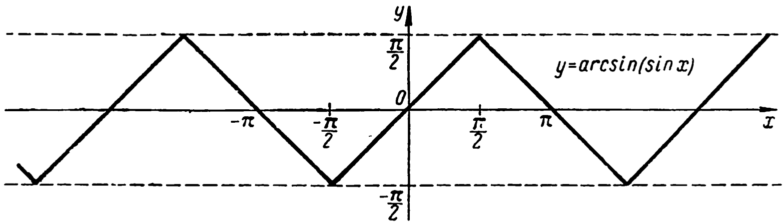
К задаче **941.**



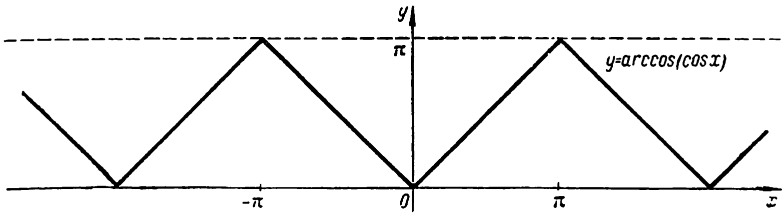
К задаче 942.



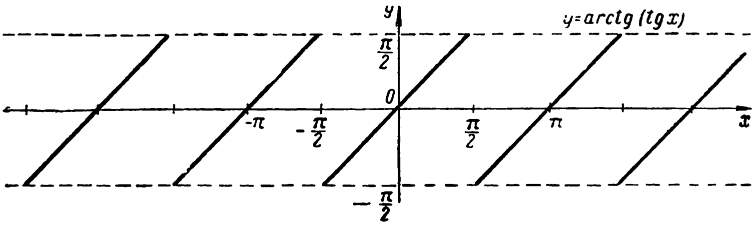
К задаче 943.



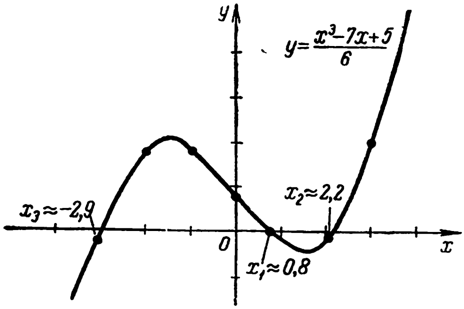
К задаче 944.



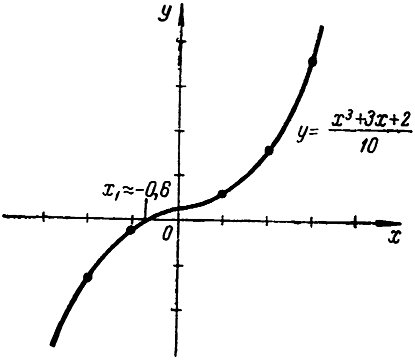
К задаче 945.



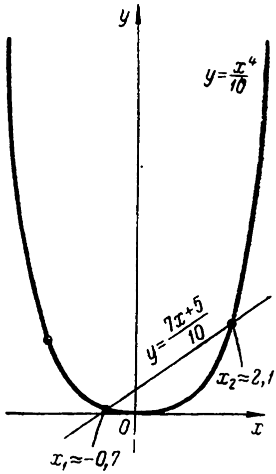
К задаче **946.**



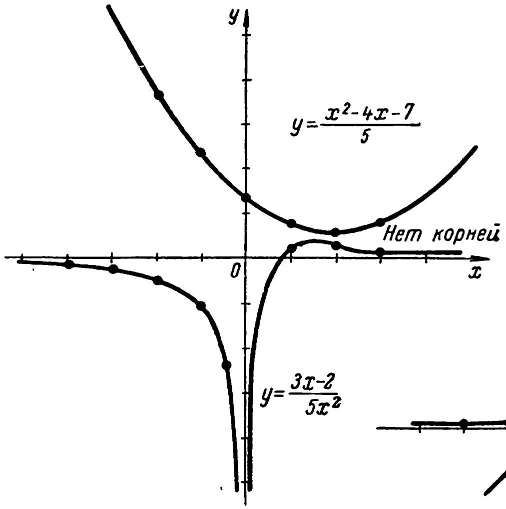
К задаче **957.**



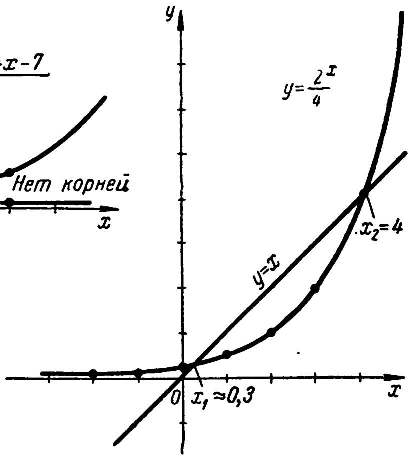
К задаче **958.**



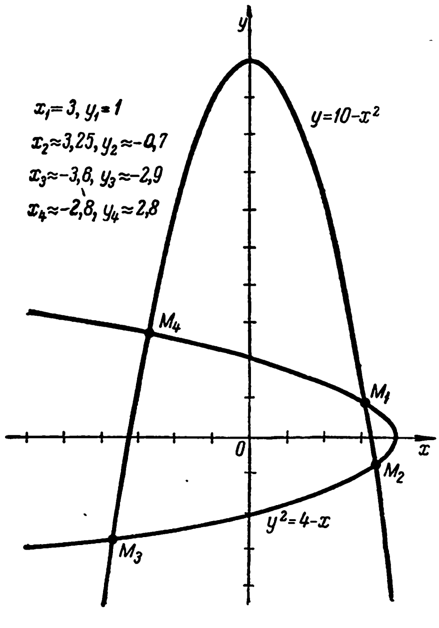
К задаче **959.**



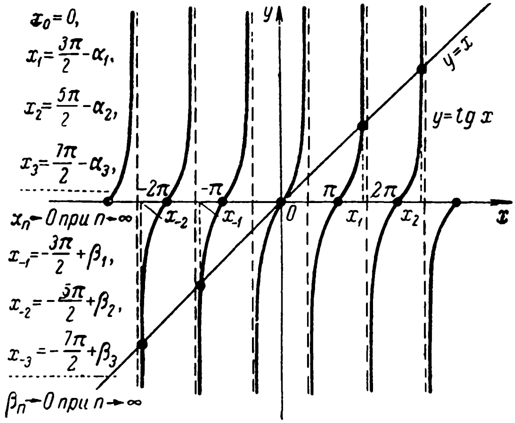
К задаче **960**.



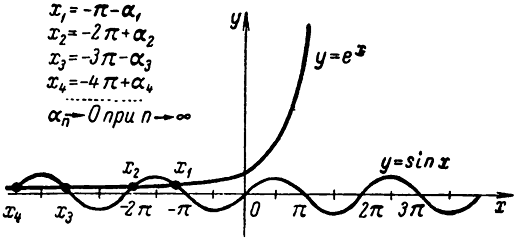
К задаче **961**.



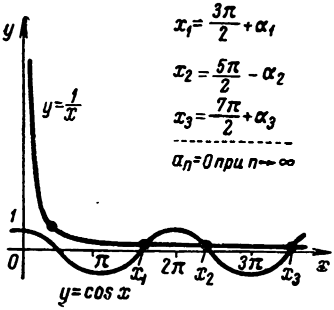
К задаче **962**.



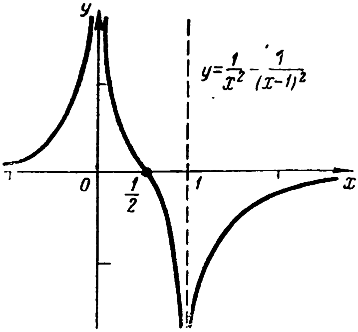
К задаче 963.



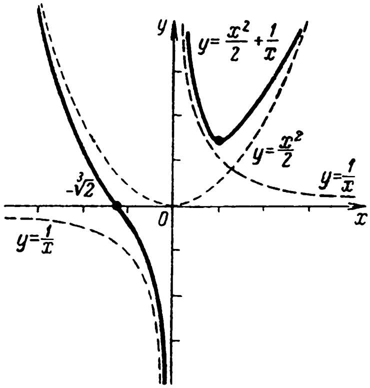
К задаче 964.



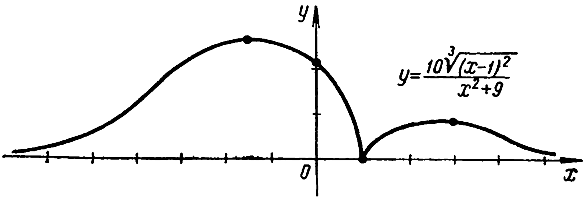
К задаче 965.



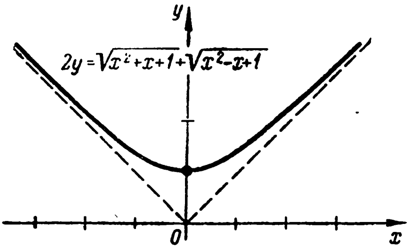
К задаче **1472.**



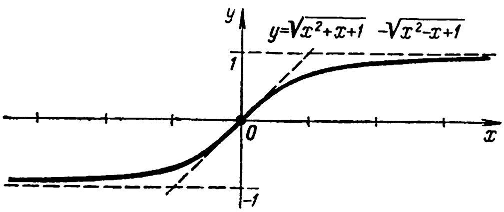
К задаче **1473.**



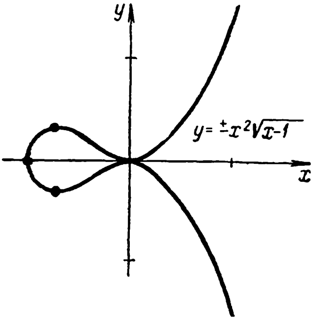
К задаче **1478.**



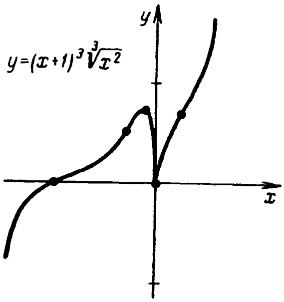
К задаче **1479.**



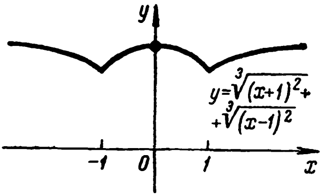
К задаче **1480.**



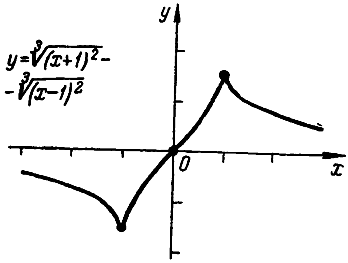
К задаче **1481.**



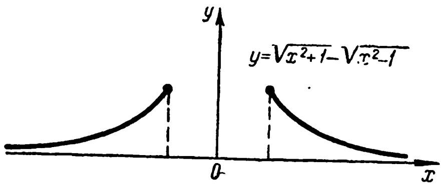
К задаче **1482.**



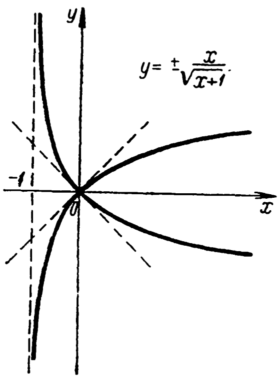
К задаче **1483.**



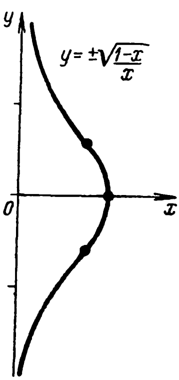
К задаче **1484.**



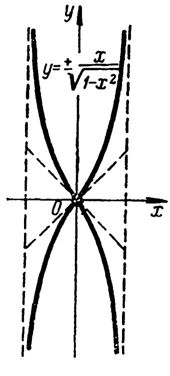
К задаче **1485.**



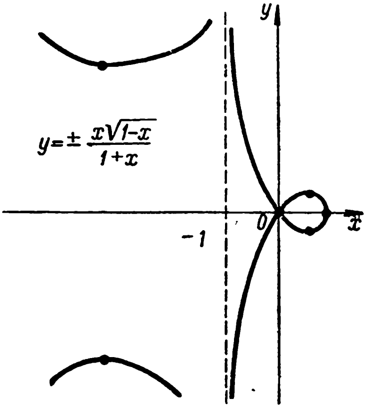
К задаче **1486.**



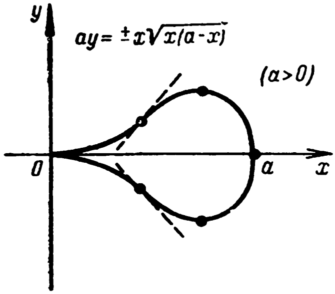
К задаче **1487.**



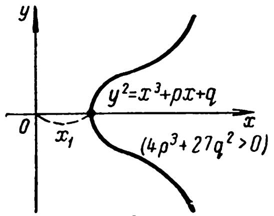
К задаче **1488.**



К задаче **1489.**



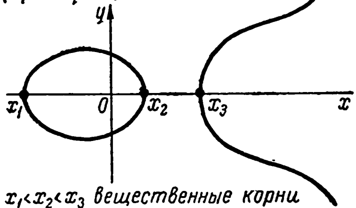
К задаче **1490.**



x_1 - корень уравнения
$x^3+px+q=0$

К задаче **1491.**

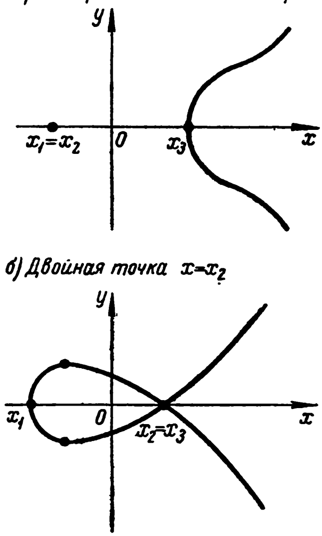
$y^2=x^3+px+q$
$(4p^3+27q^2<0)$



$x_1<x_2<x_3$ вещественные корни
уравнения $x^3+px+q=0$

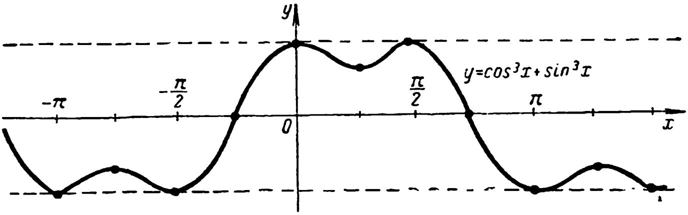
К задаче **1492.**

$y^2=x^3+px+q$
$(4p^3+27q^2=0)$
а) Изолированная точка $x=x_1$

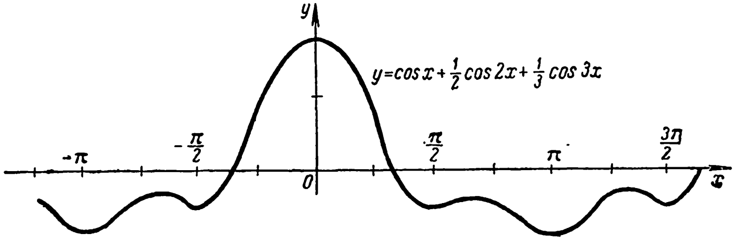


(Максимум $|y|$ при $x=-x_2$)

К задаче **1493.**

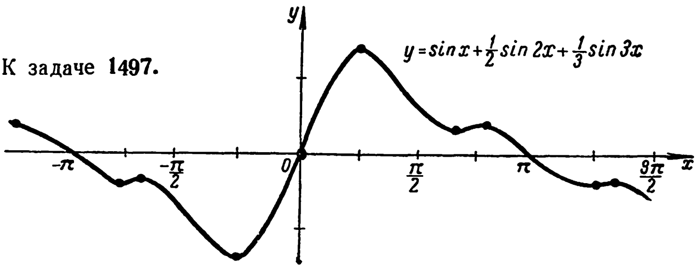


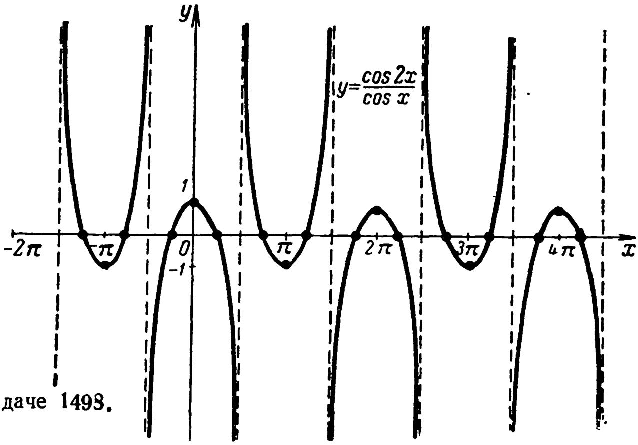
К задаче **1494.**



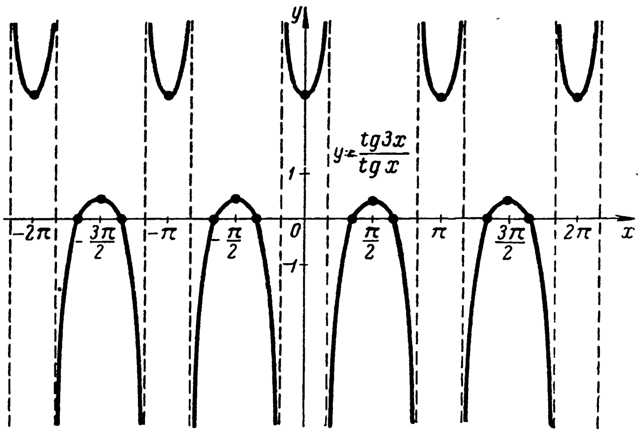
К задаче **1496.**

К задаче **1497.**

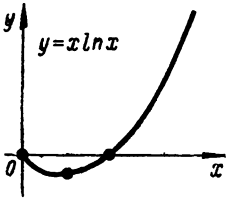




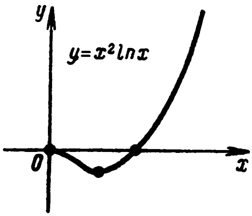
К задаче **1498.**



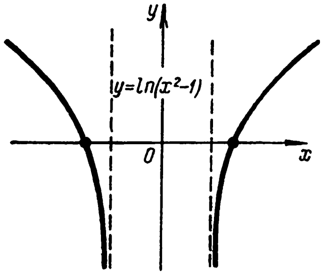
К задаче 1499.



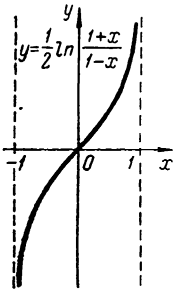
К задаче 1502.



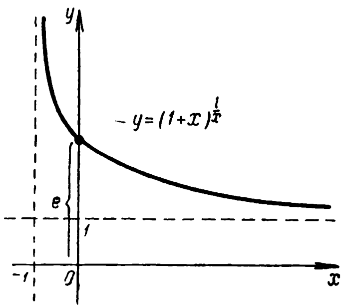
К задаче 1503.



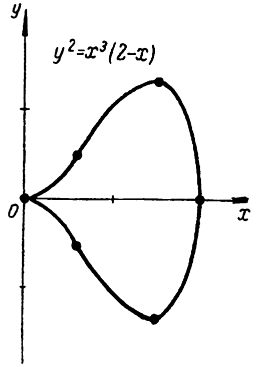
К задаче 1504.



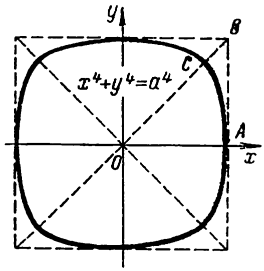
К задаче 1505.



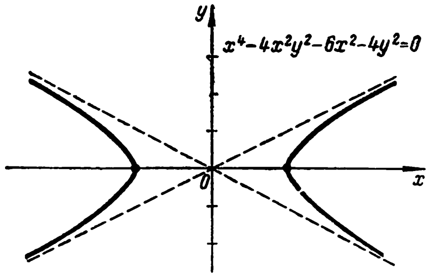
К задаче 1506.



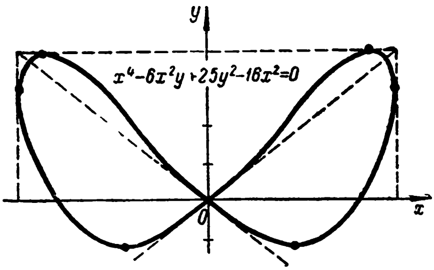
К задаче **2157.**



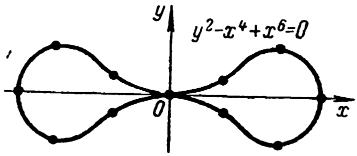
К задаче **2158.**



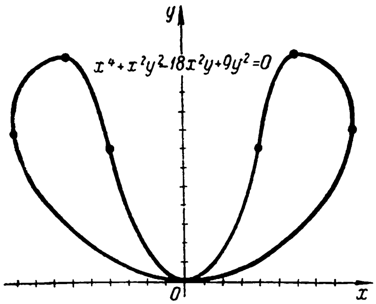
К задаче **2160.**



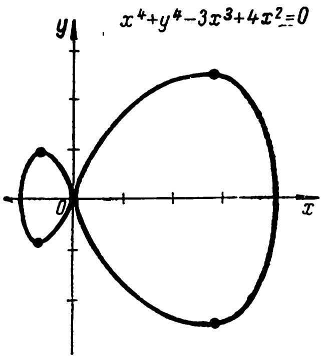
К задаче **2161.**



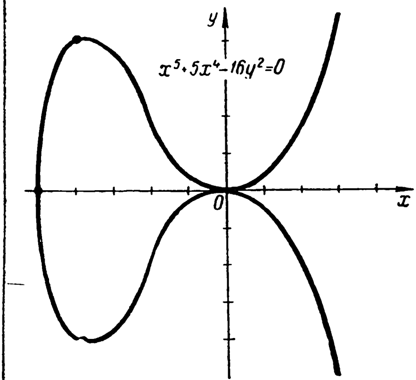
К задаче **2162.**



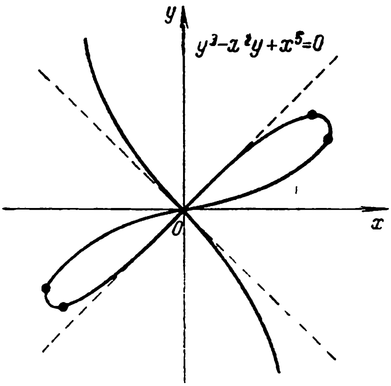
К задаче **2163.**



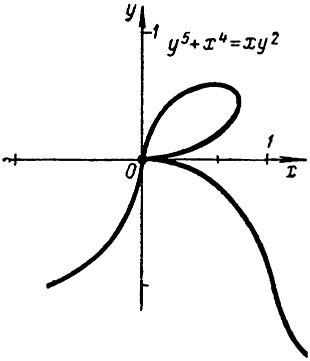
К задаче **2164.**



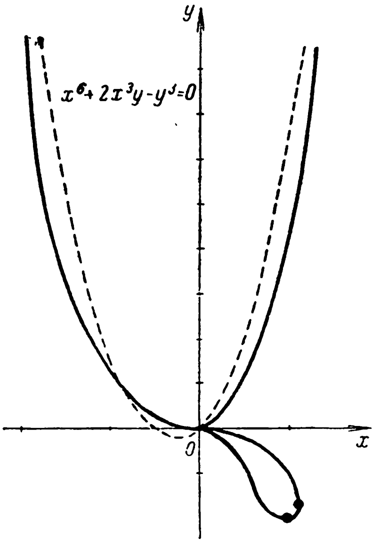
К задаче **2177.**



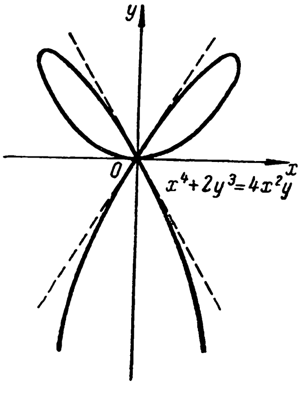
К задаче **2178.**



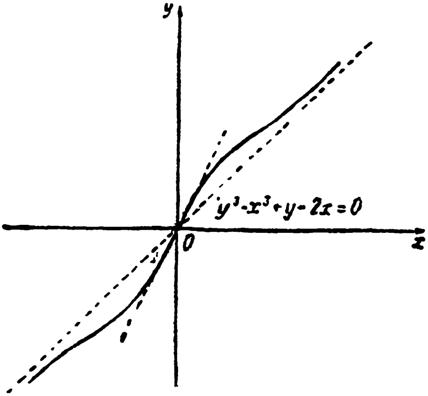
К задаче **2179.**



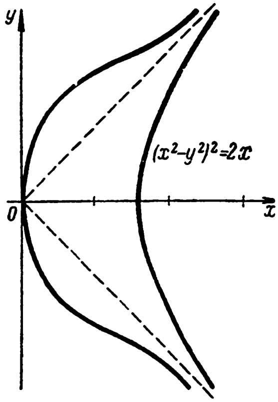
К задаче **2180.**



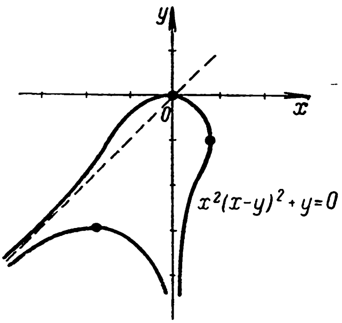
К задаче **2181.**



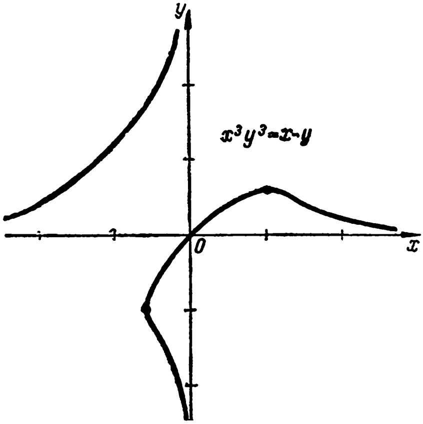
К задаче 2182.



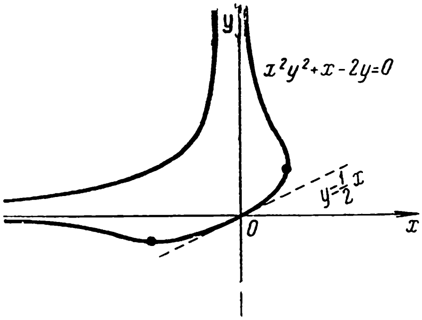
К задаче 2183.



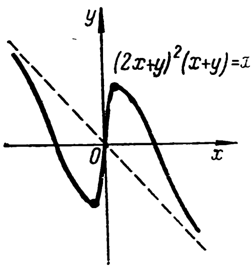
К задаче 2184.



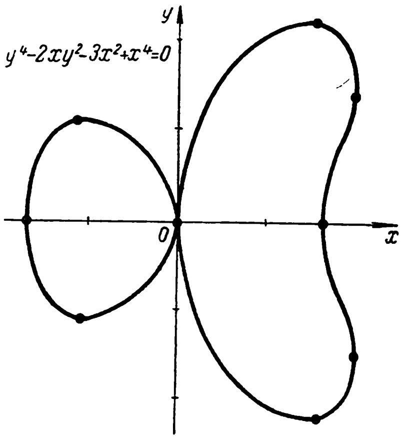
К задаче 2185.



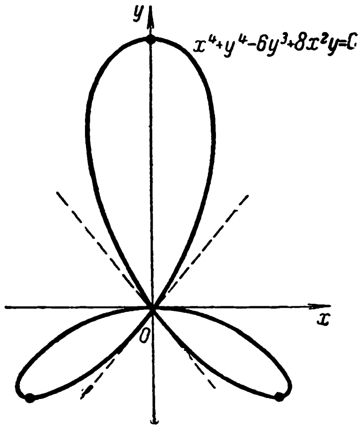
К задаче 2186.



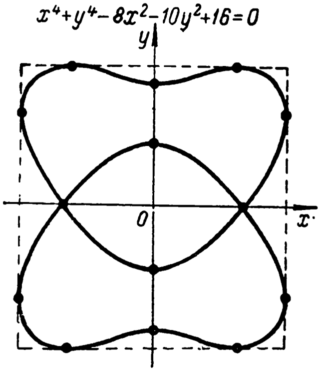
К задаче 2187.



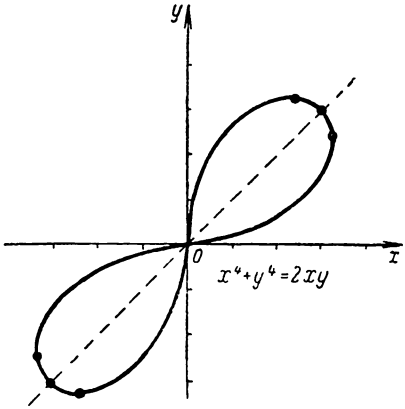
К задаче 2165.



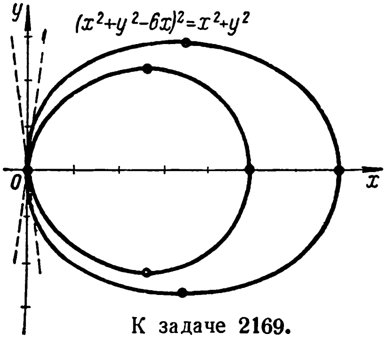
К задаче 2166.



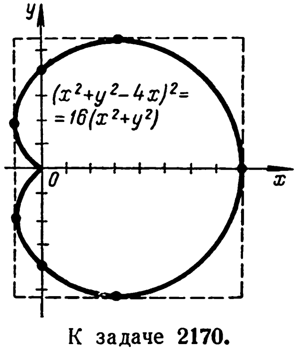
К задаче 2167.



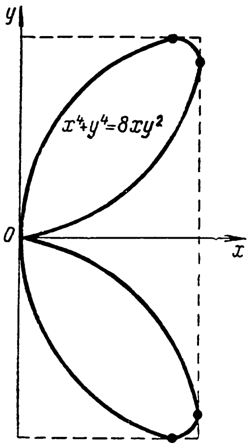
К задаче 2168.



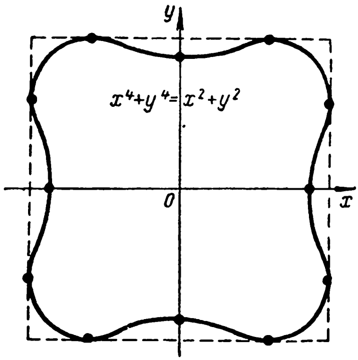
К задаче 2169.



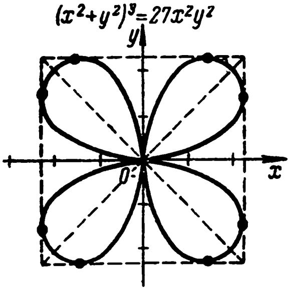
К задаче 2170.



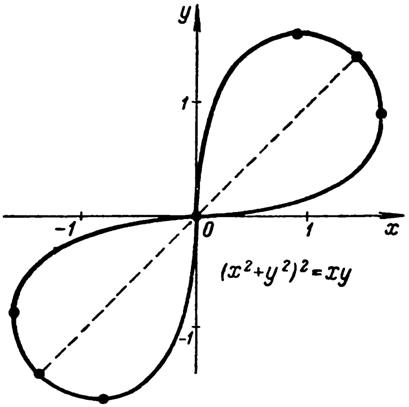
К задаче 2171.



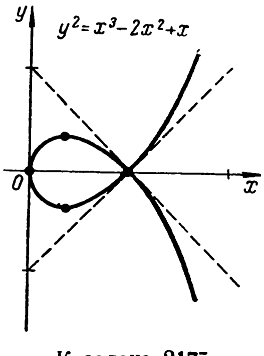
К задаче 2172.



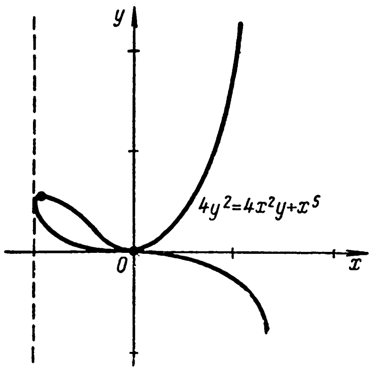
К задаче 2173.



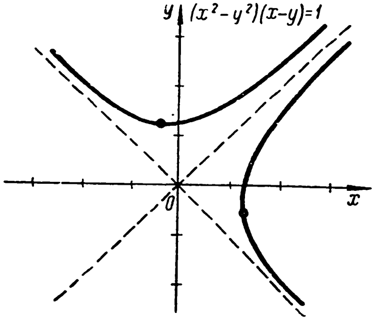
К задаче 2174.



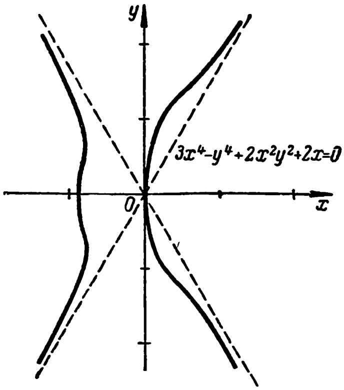
К задаче 2175.



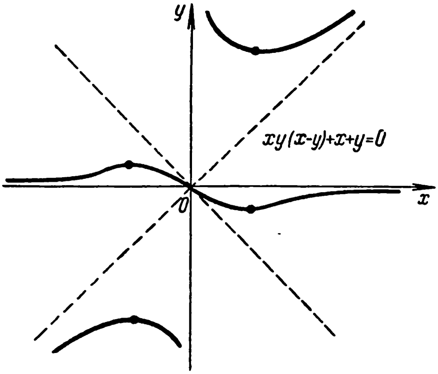
К задаче 2176.



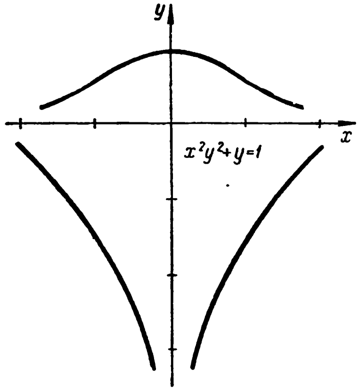
К задаче **2188.**



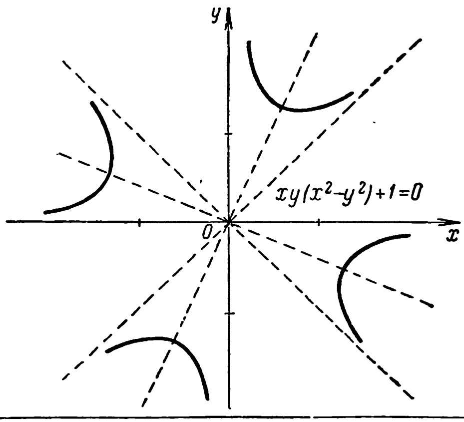
К задаче **2189.**



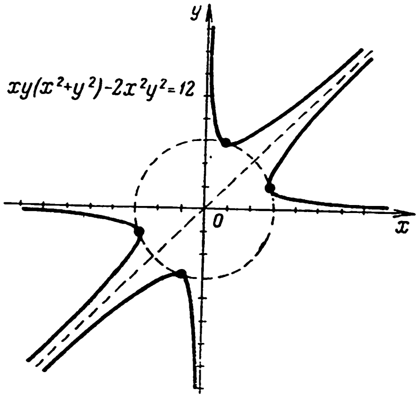
К задаче **2190.**



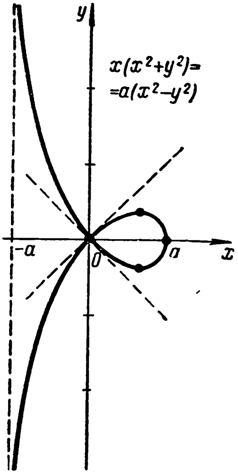
К задаче **2191.**



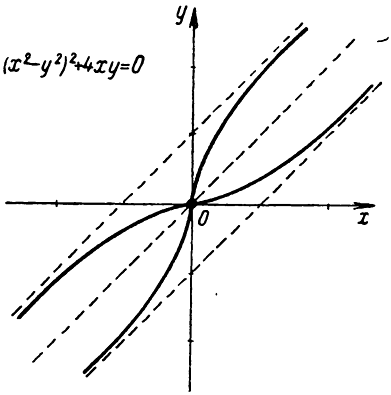
К задаче **2192.**



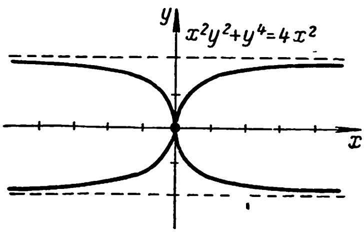
К задаче **2193**.



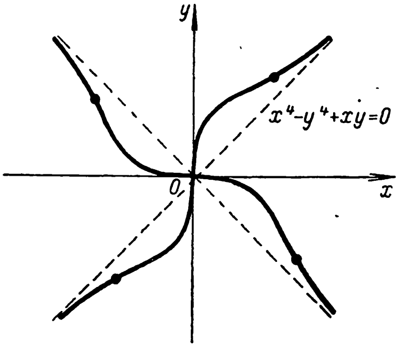
К задаче **2194**.



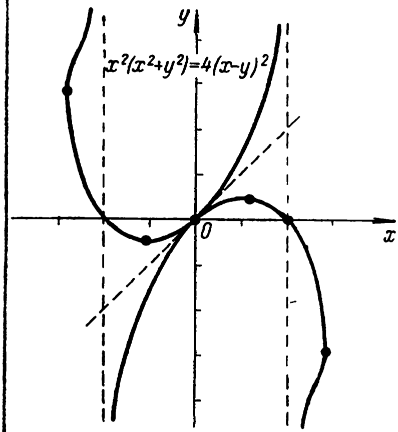
К задаче **2195**.



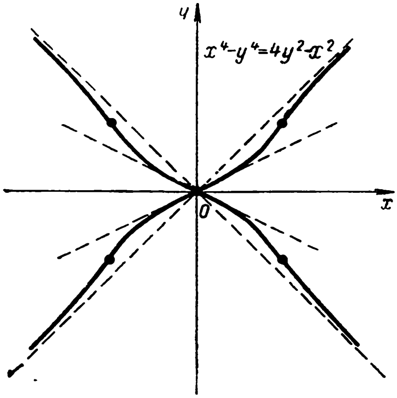
К задаче **2196**.



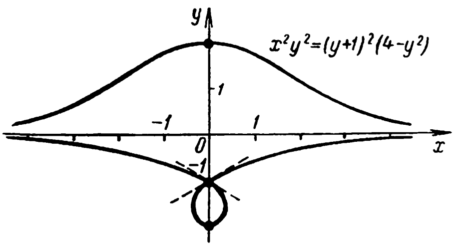
К задаче **2197**.



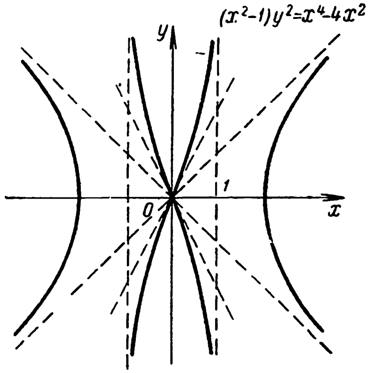
К задаче 2198.



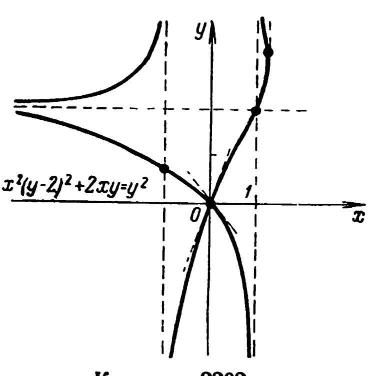
К задаче 2199.



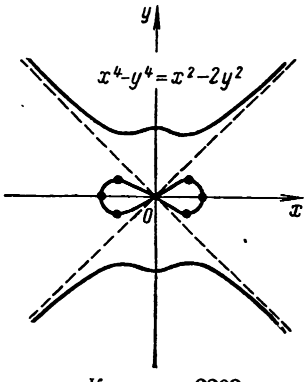
К задаче 2200.



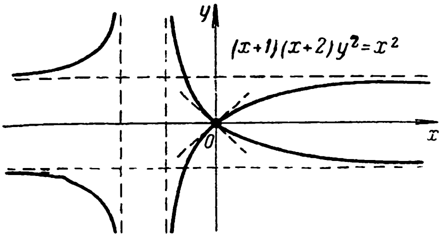
К задаче 2201.



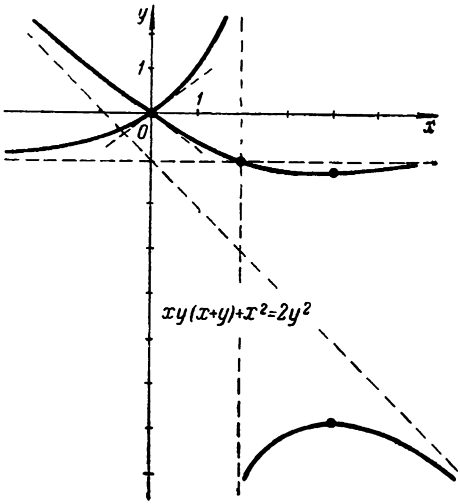
К задаче 2202.



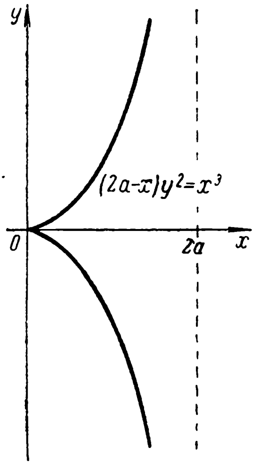
К задаче 2203.



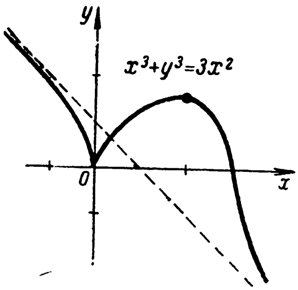
К задаче **2204**.



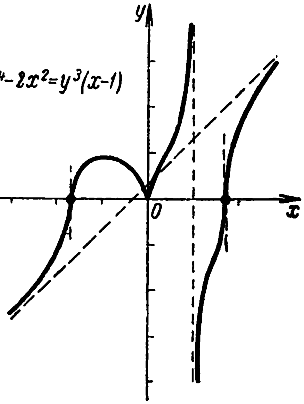
К задаче **2205**.



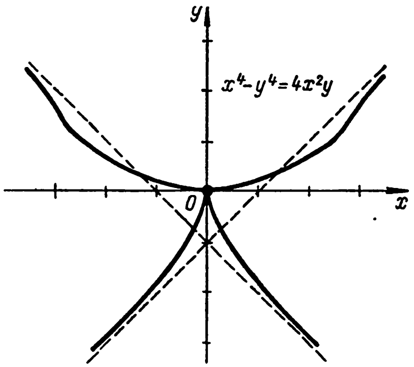
К задаче **2206**.



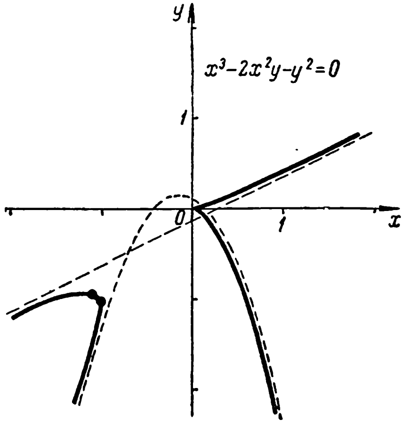
К задаче **2207**.



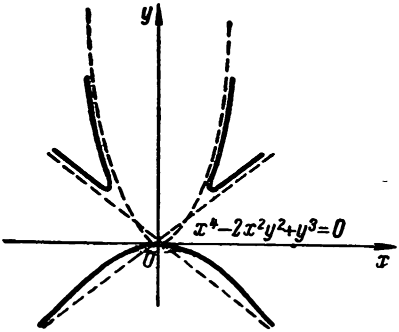
К задаче 2208.



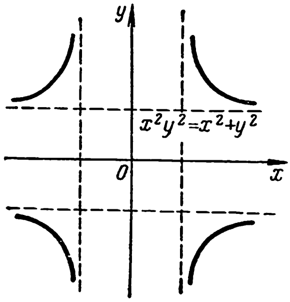
К задаче **2209.**



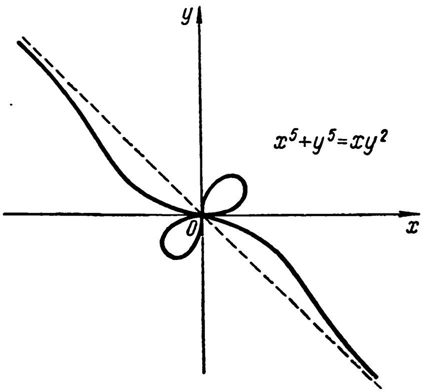
К задаче **2210.**



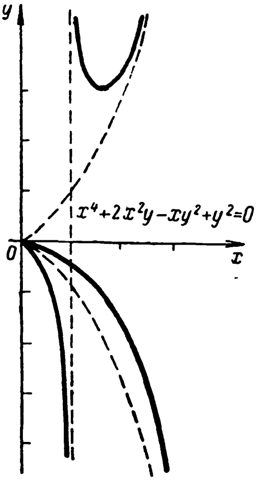
К задаче **2211.**



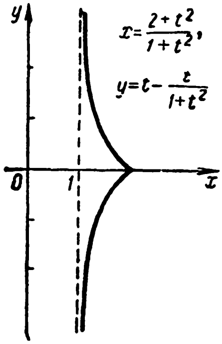
К задаче **2212.**



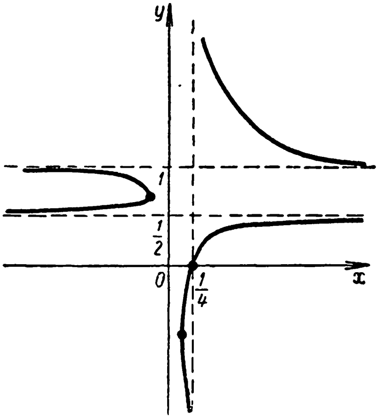
К задаче **2213.**



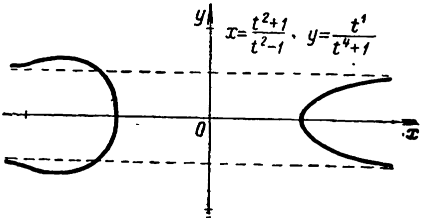
К задаче **2214.**



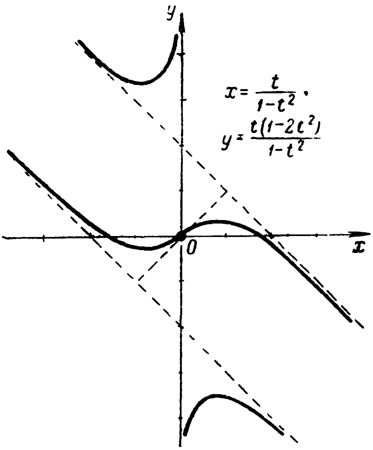
К задаче **2215.**



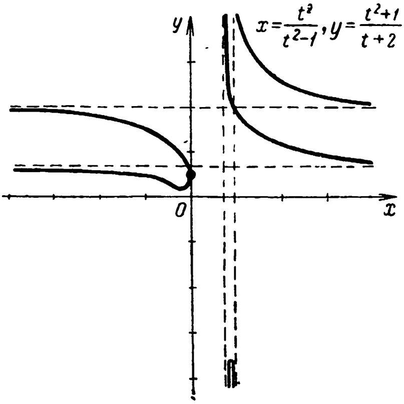
К задаче **2216.**



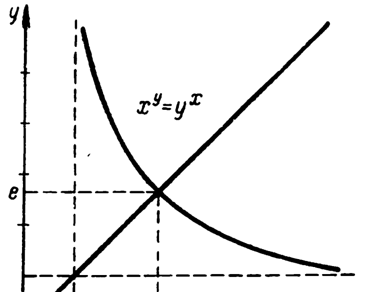
К задаче **2217.**



К задаче 2218.



К задаче 2219.



К задаче 2227.

Гюнтер Николай Максимович
и *Кузьмин Родион Осиевич*

Сборник задач по высшей математике

Том I

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *К. М. Волчок*
Корректор *А. И. Исакова*

Сдано в набор 4/II 1957 г. Подписано к печати 21/XII 1957 г. Бумага $60\times92/_{16}$. Физ. печ. л. 17,75. Усл. печ. л. 17,75. Уч.-изд. л. 19,38. Допечатка тиража 25 000 экз.
Цена 6 р. 80 к. Заказ № 2666.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский пр., 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград. Измайловский пр., 29

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
43	13 св.	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{6}$	$\frac{x-3}{6}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$
47	18,19 св.	удовлетворяют координаты	удовлетворяют только координаты
178	19 сн.	концов большой полуоси	центра эллипсоида
181	4 »	$\sqrt{c \sin v}$	$c \sin v$
209	10 св.	$x-y\pm 2=0$	$y=-1,\ 4x-5y=13$
212	4 сн.	$\lambda\mu_1-\lambda_1\mu=0$	$\lambda\mu_1-\lambda_1\mu\neq 0$
214	1 »	$-5y$	$-5x$
215	3 »	**846.** $\frac{1}{9}$ **861.**	**846.** $\frac{1}{9}$. **849.** $\sqrt{e}$. **861.**
216	7 св.	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi n.$	$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ (черт. к задаче 1499).
217	2 сн.	$4\sin^2 x$	$-4\sin^2 x$
218	1 св.	$a=e$	$a=e^{\pm 1}$
222	Табл.	**1450.** $\alpha \mid 2\pi-\alpha$	**1450.** $x=\alpha$, $x=\pi-\alpha$ | $x=\pi+\alpha$, $x=2\pi-\alpha$
222	Табл.	**1451.** | $x=\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$	**1451.** $x=\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ | $x=-\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$
224	12 св.	$\pi\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{v^2}{2}}$	$3\sqrt[3]{\pi\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{v^2}{2}}$
228	1 сн.	$(a^2-b^2)x^2=ma^2$	$(a^2-b^2)x=am^2$
229	12 св.	$r=a\varphi$	$r=\pm a\varphi$
232	3 »	$\left(\frac{y}{a}\right)$	$\left(\frac{y}{b}\right)$
232	2 сн.	$\frac{a}{2n}$	$a\sqrt{2}$
239	3 »	$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$
240	4 »	$e^{\frac{(3\pm 4)7\pi i}{12}}$	$e^{\frac{(3\pm 4)\pi i}{12}}$
243	10 »	375	-375
243	10 »	-217	143

Зак. 2666.